从一道中考模拟试题谈相似三角形的解题策略

胡家婷

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】我们将对应角相等、对应边成比例的两个图形称为相似图形。图形的相似是初中数学平面几何中极为重要的一个内容，是中考数学中的重点考察内容。相似三角形的知识有两个方面，一是源自相似三角形自身，二是与全等图形、相似图形有着密切的关系。通常以压轴题的方式出现在中考试卷中，对学生的解决问题能力提出了较高的要求，同时会涉及到数形结合、分类、方程、函数等多种数学思想方法。本文对一道2023年上海市嘉定区中考二模填空压轴题，采用一题多解的形式探讨相似三角形的解题策略，以期学生掌握初中数学基础知识、基本技能，提高分析问题、解决问题的能力，进而提升学生几何直观、模型观念、逻辑推理等数学核心素养。

【关键词】相似三角形；四点共圆；初中数学

【收稿日期】2024年1月18日 **【出刊日期】**2024年3月21日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20240005

Discuss the strategy of solving similar triangles from a mock test question for the high school entrance examination

Jiating Hu

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 We call two figures whose corresponding angles are equal and whose corresponding sides are proportional similar. The similarity of figures is an extremely important element of plane geometry in middle school math, and it is a key examination in the middle school math test. The knowledge of similar triangles has two aspects, one is derived from similar triangles themselves, and the other is closely related to congruent figures and similar figures. It usually appears in the middle school examination paper as a finale question, which puts high demands on students' problem solving ability, and at the same time, it will involve a variety of mathematical ideas and methods, such as combination of numbers and shapes, classification, equations, functions and so on. In this paper, a 2023 Shanghai Jiading District Secondary School Examination second-mode fill-in-the-blank finale questions, using the form of one problem with multiple solutions to explore similar triangles solution strategy, in order to students to master the basic knowledge of junior high school mathematics, basic skills, to improve the analysis of the problem, problem solving ability, and then enhance the students' geometric intuition, the concept of modeling, logical reasoning and other mathematical core literacy.

【Keywords】 Similar triangles; Four points coexist with a circle; Middle School Mathematics

1 试题呈现

如图1，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=2$，点 D、E 分别是边 BC、BA 的中点，联结 DE。将 ΔBDE 绕点 B 顺时针方向旋转，点 D、E 的对应点分别是点 D_1、E_1。如果点 E_1 落在线段 AC 上，那么线段 $CD_1=$______。

2 试题分析

本题是以直角三角形为背景，三角形旋转变换为载体的代数几何综合题，主要考察了相似三角形、中位

线定理、等腰梯形的性质、勾股定理等核心知识。文字、图形简洁明了，将三角形等知识融于简洁的图形中，既能提升学生构建知识与解题方法间联系的能力，又能培养学生思维的深度与深度。

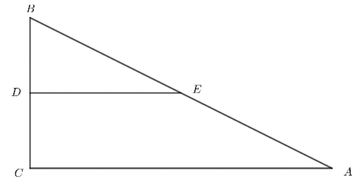

图 1

3 解题策略

视角 1　依托旋转，利用相似三角形求解

解法 1　如图 2，连接 CD_1，易知 $\Delta BDE \cong \Delta E_1CB(HL)$，得 $CE_1=1, AE_1=3.$

因为 $\angle BD_1E_1=\angle BDE=\angle BCA=90°$，所以点 B、D_1、C、E_1 四点共圆，圆心为 BE_1 中点 O，从而 $\angle BCD_1=\angle BE_1D_1=\angle BAC$. 又 $\angle CBD_1=\angle ABE_1$，所以 $\Delta BCD_1 \sim \Delta BAE_1$，所以 $\dfrac{CD_1}{AE_1}=\dfrac{BC}{BA}$，故 $CD_1=\dfrac{BC \bullet AE_1}{BA}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解法 2　由 $\angle BD_1E_1=\angle BDE=90°$，得点 B、D_1、C、E_1 四点共圆，圆心为 BE_1 中点 O 点，因为 $BD_1=CE_1$，所以 $\angle BE_1D_1=\angle CD_1E_1=\angle CBE_1=\angle BAC$，又因为 $\angle D_1CE_1=\angle AE_1B$，所以 $\Delta CD_1E_1 \sim \Delta E_1AB$，从而 $\dfrac{CD_1}{E_1A}=\dfrac{CE_1}{E_1B}$，故 $CD_1=\dfrac{CE_1 \bullet E_1A}{E_1B}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

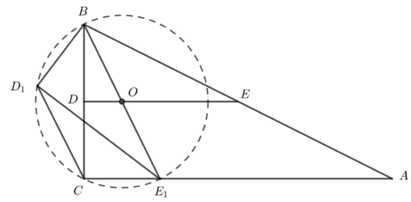

图 2

点评　　解法 1 和解法 2 均是利用三角形相似，借助相似三角形的性质，使问题迎刃而解。特别地，当题目中出现非等腰、共顶点、顶角相等有旋转时，我们就要考虑到“手拉手相似模型”，解法 1 就是利用此模型迅速求得线段长度。

视角 2　构造等腰梯形，利用平行线判定解等腰梯形

解法 3　如图 3，过点 C 作 $CF \perp BE_1$ 交 BE_1 于点 F，过点 D_1 作 $D_1G \perp BE_1$ 交 BE_1 于点 G. 因为 $S_{\Delta BCE_1}=S_{\Delta BD_1E_1}$，所以 $CF=D_1G$.

又由 $CF // D_1G$ 得四边形 $CFGD_1$ 是平行四边形，因为 $CD_1 // BE_1$，$CE_1=D_1B$，所以四边形 CE_1BD_1 是等腰梯形。因为 $CF=\dfrac{2S_{\Delta BCE_1}}{BE_1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $E_1F=\sqrt{CE_1^{\,2}-CF^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故 $CD_1=BE_1-2E_1F=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

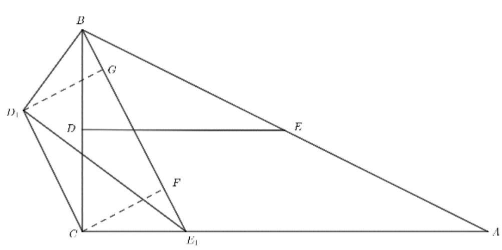

图 3

点评　　解法 2 通过作两垂线得到平行四边形，再由旋转得两直线相等，从而得到等腰梯形，再运用等

腰梯形的性质求得线段长度。

视角 3　妙用 345 倍半角模型

解法 4　如图 4，记 BC 与 D_1E_1 的交点为点 F，连接 CD_1。

因为 B、D_1、C、E_1 四点共圆，所以有 $\angle CD_1E_1=\angle BCD_1=\angle D_1E_1B=\angle E_1BC$，故有 $\triangle FD_1C\sim\triangle FBE_1$，所以 $\frac{CD_1}{E_1B}=\frac{FC}{FE_1}$，则 $CD_1=\frac{FC\bullet E_1B}{FE_1}$，根据 345 倍半角模型（正切值为 $\frac{1}{2}$ 的角的二倍角的正切值为 $\frac{4}{3}$）得，$\cos\angle CFE_1=\frac{3}{5}$，从而可得 $CD_1=\frac{FC\bullet E_1B}{FE_1}=E_1B\bullet\cos\angle CFE_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

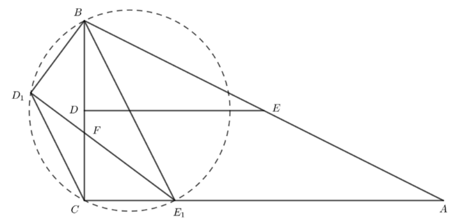

图 4

点评　由两直角相等我们可联想到四点共圆，从而利用圆的性质（同弦/等弦所对的圆周角相等）得出角相等，再通过三角形相似以及 345 倍半角模型求解[3]。此方法需要学生对几何模型具有较强的洞察能力。

视角 4　构造直角三角形，通过设参建立函数表达式，利用勾股定理求解

解法 5　如图 5，过点 D_1 作 $D_1F\perp BC$ 交 BC 于点 F。

由 $\angle CBE_1=\angle BCD_1$，$\tan\angle CBE_1=\frac{1}{2}$，可得 $\tan\angle BCD_1=\frac{1}{2}$.

设 $D_1F=x$，则 $CF=2x$，$BF=2-2x$.

在 $Rt\Delta BFD_1$ 中，根据勾股定理得 $BF^2+D_1F^2=BD_1^2$，解得 $x_1=\frac{3}{5}$，$x_2=1$（舍去）。

在 $Rt\Delta CFD_1$ 中，根据勾股定理得 $D_1F^2+CF^2=CD_1^2$，解得 $CD_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$（负舍）。

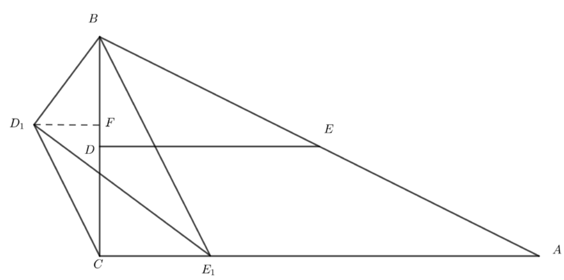

图 5

点评　解法 4 自然简洁，通过恰当地构造辅助直角三角形，利用直角三角形的性质即勾股定理，可使问题化难为易，解题思路更加明朗。

视角 5　构造平面直角坐标系

解法 6　如图 6，以点 C 为原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，则有 $A(0,0)$，$B(0,2)$，　$E_1(1,0)$，$y_{BE_1}=-2x+2$. 过点 C 作 $CF\perp BE_1$ 交 BE_1 于点 F，过点 D_1 作 $D_1G\perp BE_1$ 交 BE_1 于点 G.

因为 $S_{\Delta BCE_1}=S_{\Delta BD_1E_1}$，所以 $CF=D_1G$，

又因为 $CF\mathbin{//}D_1G$，所以四边形 $CFGD_1$ 是平行四边形，所以 $CD_1\mathbin{//}BE_1$，所以 $y_{CD_1}=-2x$.

设 $D_1(a,-2a)$，所以 $BD_1=1$，

$BD_1^2=(a-0)^2+(-2a-2)^2$，

所以 $a_1=-\dfrac{3}{5}$，$a_2=-1$.

当 $a=-1$ 时，为图中点 D_2，不符题意，故舍去，则 $D_1(-\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5})$.

所以 $CD_1=\sqrt{(-\dfrac{3}{5})^2+(\dfrac{6}{5})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

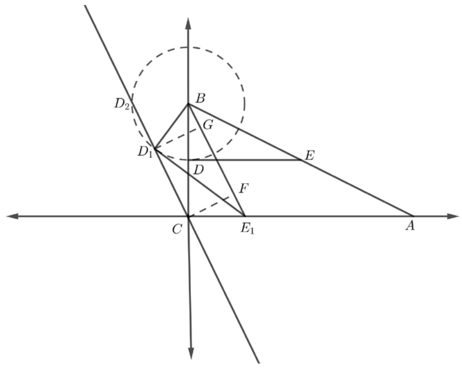

图 6

点评　由 $\angle C=90^{\circ}$，容易想到建立平面直角坐标系 xCy，此方法在于将平面几何问题转化成代数问题，解题关键在于求出点 D_1 的坐标，从而求出线段 CD_1 的长度。

4 解题反思

（1）整合教学内容，形成科学思维

本文以一道有关相似三角形的中考模拟题为载体，以教科书中的基础知识和基本解题方法为基础，引导学生从数学知识的产生与来源、数学概念原理的关系着手[4]，构建知识体系，探寻一题多解，帮助学生发散思维，提升问题解决能力，发展学科核心素养。

（2）探寻图形联系，提升几何直观

三角形相似和全等表示的是两个图形以及它们之间有关要素间的特定的位置和数量关系，所以在解题的时候，要注意从特定的已知条件出发，找出相关图形之间的边角关系。如本题中，四点共圆的发现，构造等腰梯形，再如平行线的判定等。

（3）学会反思归纳，内化基本套路

教师在进行解题教学时，应引导学生理解题目，即在教学过程中，更要重视授之以渔。对如何进行题设分析、思路构建等，要引导学生进行反思与提炼，不断积累内化探寻的基本套路，从而才能打破思维定式。如本题中各种“型”的探索，从而构建基本几何图形，如“共圆”、“相似”、“全等”等等[5]。

参考文献

[1] 周琛.几何中动态最值问题的求解策略——一道中考压轴题的思路及解法赏析[J].初中数学教与学,2023(13): 26-28+43.
[2] 刘震.立足几何建模领悟构造思想[J].初中数学教与学,2022,(17).
[3] 王彩红.初中数学解题中倍半角知识的运用[J].现代中学生(初中版),2022,(16):
[4] 曹桐军.中点引领素养立意——一道几何试题的解法赏析和变式探究[J].初中数学教与学,2023,(13):14-16.
[5] 杨春鸟.溯本求源探寻路径——2021 年南通市中考数学第 25 题第(2)问的分析与思考[J].初中数学教与学,2022,(12): 37-39.