平面向量等和线定理在三角形中的应用

朱海静

扬州大学　江苏扬州

【摘要】平面向量是解决数学问题的重要工具，其中三点共线定理是平面向量模块的重要知识点。平面向量等和线定理作为平面向量三点共线定理的拓展，在解决向量线性表示中的系数和相关问题时具有简洁性。本文将从平面向量三点共线定理出发，探究等和线的概念和相关性质，并以等和线定理在三角形中的应用为例，从数形结合的角度展现其在解决平面向量线性表示的系数和、最值、取值范围题型中的高效性和直观性。最后总结解决系数和相关问题的一般逻辑和注意点，旨在帮助学生优化上述一类题目的解题思路，提高学生的解题效率，提升直观想象等方面的数学学科核心素养。

【关键词】平面向量；等和线定理；三角形

【收稿日期】2024 年 4 月 18 日　【出刊日期】2024 年 6 月 21 日　【DOI】10.12208/j.aam.20240006

The application of the plane vector iso-sum line theorem in triangles

Haijing Zhu

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】Plane vectors are important tools for solving mathematical problems, with the collinearity theorem of three points being a key concept in the plane vector module. The plane vector iso-sum line theorem, as an extension of the collinearity theorem of three points in plane vectors, is concise in solving problems related to coefficients and other issues in vector linear representation. This article will start from the collinearity theorem of three points in plane vectors, explore the concept and properties of iso-sum lines, and use the iso-sum line theorem in triangles as an example to demonstrate its efficiency and intuitiveness in solving coefficient sum, maximum value, and value range problems in plane vector linear representation from the perspective of numerical and geometric combination. Finally, it will summarize the general logic and key points for solving coefficient-related problems, aiming to help students optimize their problem-solving strategies for such types of questions, improve their problem-solving efficiency, and enhance their core mathematical skills in aspects such as intuitive imagination.

【**Keywords**】Plane vectors; The iso-sum line theorem; Triangle

平面向量的线性表示是向量模块的重要知识点，等和线定理是在三点共线定理的基础上的进一步探究。在系数和问题的解决上，相较于建系转化为代数问题求解的方法，应用等和线定理解题表现出了数形结合的简洁性与高效性[1]。本文重点介绍等和线定理在三角形中的应用，以期帮助学生理解等和线定理，感受该定理在解决向量系数和相关问题时的简便性，总结解决此类问题的解题思路，培养学生数形结合的思想，提升学生数学素养[2]。

1 等和线定理的探究及性质

平面向量三点共线定理是探究等和线定理的基础，我们将其作为结论1。

结论1：设 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为两个不共线向量，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in R)$, 若 A,B,P 三点共线，则 $x+y=1$, 反之亦成立。

若进一步探究三点不共线时两系数的数量关系，如图1。

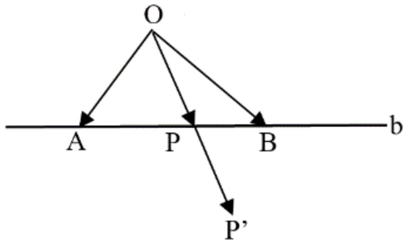


图 1

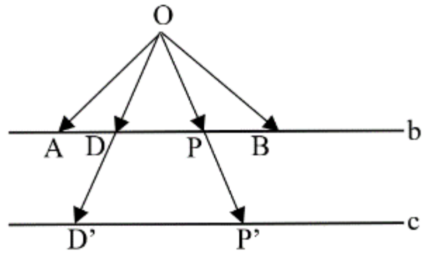


图 2

设$\overrightarrow{OP'}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$,且$\overrightarrow{OP'}=\lambda\overrightarrow{OP}(\lambda>0)$，$AB$所在直线为$b$.此时$\lambda\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,即$\overrightarrow{OP}=\frac{m}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{\lambda}\overrightarrow{OB}$,由结论1可知，$\frac{m}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}=1$,故$m+n=\lambda=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}$.过点$P'$作直线$c//b$,如图2，在$c$上任取一点$D'$，连接$OD'$交$b$于点$D$,且$\overrightarrow{OD'}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}(p,q\in R)$.由平行线分线段成比例定理可知$\overrightarrow{OD'}=\lambda\overrightarrow{OD}$.同理可得$p+q=\lambda=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|\overrightarrow{OD'}|}{|\overrightarrow{OD}|}$,即$c$上的任意一点$D'$都满足$p+q=\lambda$,我们称像直线$c$这样与$b$平行或重合的直线为等和线，当$p+q=1$时，等和线为$b$本身。$\lambda\le 0$时同理，由此可得等和线定理，即结论2。

结论2：设$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为两个不共线向量，$\overrightarrow{OP'}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$,其中$\overrightarrow{OP'}$交直线$AB$于点$P$,且终点$P'$在与$AB$平行或重合的直线上，则$m+n$为定值$\lambda$，且$|\lambda|=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}$，反之亦然。将直线$AB$及平行于$AB$的直线称为等和线。

由结论2可以求解共起点向量线性运算中两基底向量的系数和问题，关于λ，还有以下两个推论。

推论1：如图3，$\overrightarrow{OP'}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB},\lambda=m+n$,当等和线为直线$b$时，$\lambda=1$;当等和线为直线$a$时，$\lambda=0$;当等和线在直线$a$与直线$b$之间时，$\lambda\in(0,1)$;当等和线在直线$a$上方时，$\lambda\in(-\infty,0)$;当等和线在直线$b$下方时，$\lambda\in(1,+\infty)$.

推论2：如图4，$\overrightarrow{OP'}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB},\lambda=m+n$,设向量的共起点$O$到直线$AB$的距离为$d$,到等和线$c$的距离为$d_1$,则$|\lambda|=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{d_1}{d}$,即定值$|\lambda|$的大小与$O$点到等和线的距离成正比[3]。

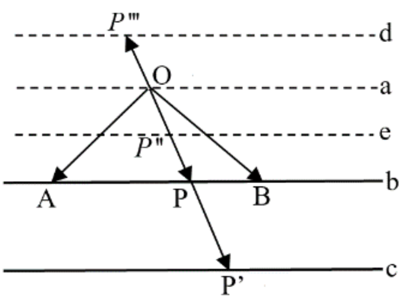


图 3

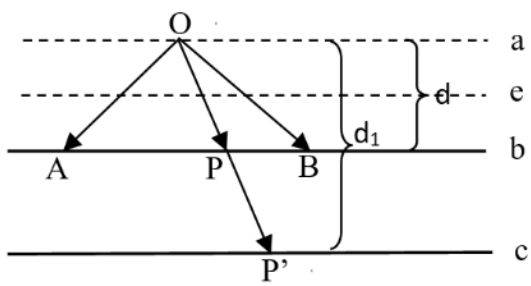


图 4

在利用等和线定理及其推论解决向量线性运算的基底系数和问题时，可以巧妙地将代数问题转化为几何问题，即运用数形结合的思想将具体的代数式求解问题转化为距离之比问题，主要题型有：双变量代数式的求值、求最值、求取值范围问题等。下面以该定理在三角形中的应用为例，体现其在解决这类题型时的简便性。

2 等和线定理在三角形中的应用

2.1 等和线定理的直接应用

例1 如图5，设 P 是 ΔABC 边 BC 上的任意一点，Q 为 AP 的中点，若 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$____.

解析 由结论 2 得 $\lambda+\mu=\dfrac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}|}$. 由 Q 为 AP 的中点，知 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{2}$.

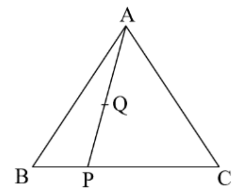


图 5

分析 本题是等和线定理的一个简单应用，只需根据定理内容将两基底系数和问题直接转化为两向量模之比即可。

例 2 设 D,E 分别是 ΔABC 的边 AB,BC 上的点，$AD=\dfrac{1}{2}AB, BE=\dfrac{2}{3}BC$, 如图 6，若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}(\lambda_1,\lambda_2\in R)$, 则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为_____。

解析 如图7，过点 A 作 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$, 则 $\overrightarrow{AF}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$, 此时问题转化为三个共起点向量线性运算，延长 AF 交射线 BC 于点 H. 由结论2，$\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AH}|}$. 由 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$ 知四边形 $AFED$ 为平行四边形，由此可得 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$, 再由 $\Delta HFE\backsim\Delta HAB$ 及 $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ 得 $\dfrac{|\overrightarrow{FH}|}{|\overrightarrow{AH}|}=\dfrac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{2|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{1}{2}$，故 $\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AH}|}=\dfrac{1}{2}$.

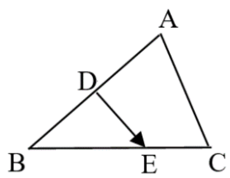


图 6

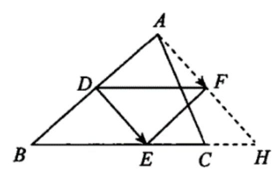


图 7

分析 等和线定理中三向量应是共起点的，所以本题先利用向量的平移使其共起点，再运用等和线定理和三角形的相似解题。

2.2 等和线定理的逆用

例3 已知 M 是边长为2的正三角形 ABC 内一点，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 若 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{3}$, 则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值为_____。

解析 如图8，分别取线段 AB,AC 靠近点 A 的三等分点，连接 EF, 由 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{3}$ 及结论2我们可以反推出点 M 的运动轨迹为线段 EF. 取 BC 的中点 Q, 所求的数量积可以利用极化恒等式转化为 $MQ^2-\dfrac{1}{4}BC^2=MQ^2-1$. 求 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值，即求 MQ 的最小值。M 为线段 EF 上的动点，Q 为 BC 上定点，当 $MQ\perp EF$，即当点 M 运动到图8的 M' 点时，MQ 取最小值，此时由正三角形三线合一的性质及

$EF // BC$ 可知 $AQ \perp EF$, 故 M' 为 EF 与 AQ 交点。由平行线分线段成比例定理及 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$，得 $|\overrightarrow{M'Q}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AQ}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 $|\overrightarrow{MQ}|_{\min}=|\overrightarrow{M'Q}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $(\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC})_{\min}=|\overrightarrow{MQ}|^2{}_{\min}-1=\frac{1}{3}$.

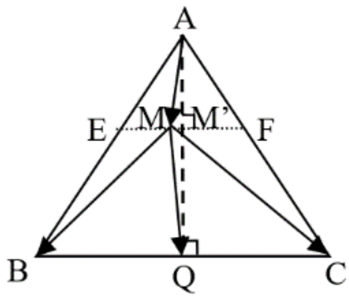


图 8

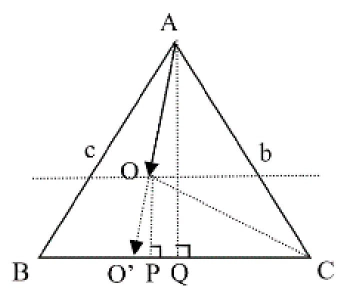
分析 这是一道将等和线定理和极化恒等式结合考察的动点问题，动点问题的关键是要确定点的轨迹，本题灵活逆用等和线定理找出点 M 的轨迹，取到了事半功倍的效果。近年来高考题越来越灵活，对一些重要定理的考察也不局限于简单的直接应用，学会逆用定理往往会更快把握题目的关键。

2.3 等和线定理与三角形“四心”

例4 已知 ΔABC 的外接圆圆心为 O, 且 $\angle A=60°$, 若 $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, $(\alpha,\beta\in R)$, 则 $\alpha+\beta$ 的最大值为______。

解析 如图9，设 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c, 外接圆半径为 R. 连接 AO 并延长交 BC 于点 O', 过点 A,O 作 $AQ\perp BC, OP\perp BC$. 由结论 2 及 $\Delta O'PO \backsim \Delta O'QA$ 可得 $\alpha+\beta=\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AO'}|}=\frac{|\overrightarrow{AO'}|-|\overrightarrow{OO'}|}{|\overrightarrow{AO'}|}=1-\frac{|\overrightarrow{OO'}|}{|\overrightarrow{AO'}|}=1-\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}$. 连接 OC, 根据外心的性质知 OP 所在直线垂直平分边 BC, 故 $PC=\frac{a}{2}$，在 ΔABC 中由正弦定理得：$OC=R=\frac{a}{2\sin\angle BAC}=\frac{a}{\sqrt{3}}$, 在 $Rt\Delta OCP$ 中，由勾股定理得：

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{OC^2-PC^2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 在 ΔABC 中由等面积法可求得 $|\overrightarrow{AQ}|=\frac{bc\sin\angle BAC}{a}=\frac{\sqrt{3}bc}{2a}$. 要求 $\alpha+\beta$ 的最大值，只要求 $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}$ 的最小值，即代数式 $\frac{a^2}{3bc}$ 的最小值，在 ΔABC 中利用余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$ 进行消参，得：$bc=b^2+c^2-a^2$, 此时代数式可转化为 $\frac{b^2+c^2-bc}{3bc}$, 由基本不等式可得 $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{b^2+c^2-bc}{3bc}\geq\frac{1}{3}$, 故 $\alpha+\beta\leq 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $(\alpha+\beta)_{\max}=\frac{2}{3}$.



a

图 9

分析 除了等和线定理，本题还考察了外心的性质、三角函数、基本不等式等知识点，是一道较为综合的题目。利用等和线定理将两变量之和转化为两线段长度之比后求相应表达式的最值，解题思路清晰，且具有一般性。将本题中$\angle A$特殊的函数值换成一般的函数值，上述思路及步骤不变。将点O改为三角形内切圆的圆心，其他条件不变，思路与本题并无两样，不过在最值的处理方式上有所不同，如下变式。

变式 已知ΔABC的内心为O, 且$\angle A=60°$, 若$\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}(\alpha,\beta\in R)$, 则$\alpha+\beta$的最大值为______。

解析 设ΔABC内切圆半径为r, 如图9，在本题中AQ依然是BC边上的高，为$\frac{bc\sin\angle BAC}{a}$, 此时$|\overrightarrow{OP}|=r$, 在$\Delta ABC$中利用等面积法可得$|\overrightarrow{OP}|=r=\dfrac{bc\sin\angle BAC}{a+b+c}$, 故$\alpha+\beta=1-\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=1-\dfrac{a}{a+b+c}=1-\dfrac{1}{1+\frac{b+c}{a}}$.

要求$\alpha+\beta$的最大值，即求一次齐次分式$\dfrac{b+c}{a}$的最大值。观察由余弦定理得出的关系式$bc=b^2+c^2-a^2$的特征我们可以想到先将$\dfrac{b+c}{a}$平方，变成二次齐次分式，完成消参，再利用基本不等式求最值，即

$(\dfrac{b+c}{a})^2=\dfrac{(b+c)^2}{b^2+c^2-bc}=\dfrac{(b+c)^2}{(b+c)^2-3bc}\le\dfrac{(b+c)^2}{(b+c)^2-\frac{3(b+c)^2}{4}}=4$, 所以$(\dfrac{b+c}{a})_{\max}=2$, $(\alpha+\beta)_{\max}=\dfrac{2}{3}$.

例5 已知O是ΔABC内一点，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, 点$M$在$\Delta OBC$内（不含边界），若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 求$\lambda+2\mu$的取值范围。

解析 根据等和线定理，我们要将基底对应于所求系数线性关系$\lambda+2\mu$作调整，如图10，取AC中点D, 连接BD, $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AD}$, BD所在直线即为$\lambda+2\mu=1$的等和线。由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$可知$O$为$\Delta ABC$的重心，故$O$在$BD$上。由推论1知，当$M$在边$BO$上运动时，$\lambda+2\mu=1$, 当$M$在三角形内部运动时，如图10，过$M$点作平行于$BD$的直线，交$AC$于点$D'$，此时$1<\lambda+2\mu=\dfrac{|\overrightarrow{AD'}|}{|\overrightarrow{AD}|}<\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AD}|}=2$, 因为$M$的轨迹不含三角形三边，故$\lambda+2\mu\in(1,2)$.

分析 当所求系数和代数式与题中所给基向量前相应系数不一致时，在共线前提下，我们可以通过伸长、压缩等方式调整基底向量，使得新基底向量系数和与所求线性关系一致，再作出取得最值时相应的等和线，利用结论 2 求解。

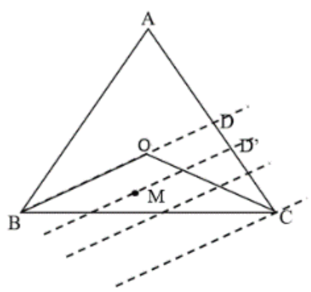


图 10

2.4 等和线定理的综合应用

例6 如图11，在同一个平面内，向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$的模分别为$1,1,\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为α, 且$\tan\alpha=7$, $\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$45°$. 若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$, 则$m+n=$____.

解析 如图12，连接 AB，交 OC 于点 D. 由结论2知 $m+n=\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD}|}$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$ 已知，只需求 $|\overrightarrow{OD}|$ 的值。在 ΔBOA 中由等面积法可得 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(45°+\alpha)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|\sin 45°+\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|\sin\alpha$，由 $\tan\alpha=7$ 知 $\sin\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}},\cos\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，故由两角和的正弦公式得 $\sin(\alpha+45°)=\frac{4}{5}$，从而解出 $|\overrightarrow{OD}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$，由此可得 $m+n=\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD}|}=3$.

分析 本题是等和线定理和解三角形的综合应用，体现用等和线定理解题的逻辑性和简便性。题中给了相关边和角的条件，容易想到要在三角形中使用这些条件，结合所求代数和形式想到连接 AB 构造等和线，将代数和转化为边之比，已知边 OC 的长度，再在 ΔABO 中利用解三角形的知识求出边 OD 的长度，得出最终结果。

本题也可以建系解决，以点 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，垂直于 OA 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系。计算出点 A,B,C 的坐标，根据题中所给条件 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，得到关于 m,n 的二元一次方程组，解方程组得出 m,n 的值，相加得到结果。用建系法解决向量问题十分常见，但在本题中未出现明显的直角标志，学生可能不会第一时间想到建系解决；其次，建系解题的过程中坐标求解是重点，而本题含有未知角度，这为点 B 坐标的求解增加了难度和计算量。对比之下，采用等和线法解题逻辑清晰，计算简便。

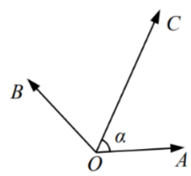


图 11

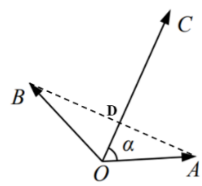


图 12

例7[4]已知正三角形 ABC 的边长为2，D 是 BC 的中点，动点 P 满足 $|\overrightarrow{PD}|\le 1$，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，其中 $x+y\ge 1$，则 $2x+y$ 的最大值为______。

解析 动点 P 满足 $|\overrightarrow{PD}|\le 1$，由其几何意义可知点 P 的运动轨迹为以定点 D 为圆心，1为半径的圆上或其内部。又因为 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x+y\ge 1)$，由推论1可将点 P 的运动轨迹进一步缩小为图13所示的阴影部分（含边界）。

确定点 P 的运动轨迹后，将基底对应于所求系数线性关系 $2x+y$ 作调整，取边 AB 中点 E，连接 CE，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=2x\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=2x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，$EC$ 所在直线即为 $2x+y=1$ 的等和线。设 AP 交 CE 于点 F，由结论2知 $2x+y=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AF}|}$，线段 AF 与线段 AP 的长度随着点 P 的运动都是不定的，需要进

行进一步转化。设过点 P 的等和线与 AB 所在直线交于点 G，在 ΔABC 中由三线合一知 $CE\perp AB$，由推论2知 $2x+y=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{|\overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{AE}|}$，$|\overrightarrow{AE}|$ 为定值1，要求 $2x+y$ 的最大值，即求 $|\overrightarrow{AG}|$ 的最大值。当等和线与半圆相切时，如图13的直线 P_1H，$|\overrightarrow{AG}|$ 取得最大值，即 $|\overrightarrow{AH}|$。取 BE 中点 I，连接 ID,DP_1，易知 $\angle DIH=\angle IHP_1=\angle DP_1H=90°$，故四边形 IDP_1H 是矩形，由此得出 $|\overrightarrow{IH}|=|\overrightarrow{DP_1}|=1$。$|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{IH}|+|\overrightarrow{IE}|+|\overrightarrow{EA}|=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$，所以 $(2x+y)_{\max}=\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AE}|}=\frac{5}{2}$.

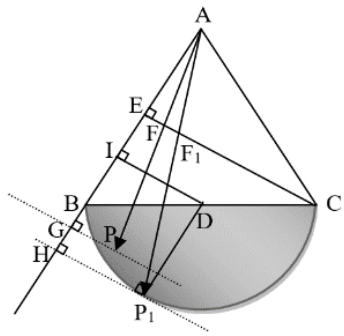


图 13

分析 本题是等和线定理与动点问题的综合，与上道综合题相比，本题考察等和线定理的形式更多样化。首先依据等和线定理的推论1确定点 P 的最终轨迹；其次，调整基底，使其前面的系数与所求系数线性关系相对应；再通过推论2将不定长度之比转化为距离之比，在点 P 的运动范围内找到离点 A 距离最远的等和线；最后通过几何关系得出相关长度。

上述例题借助三角形这个平面图形，体现出等和线定理在解决平面向量线性运算中两基底系数和问题具有一定的简便性。用此方法解题目的性明确，思路清晰。在求解系数和问题时，首先要确保相关向量共起点，系数和代数式与题中所给基向量前相应系数一致，再根据题意将相关系数和转化为线段长度或距离之比，用统一的数学模型解决系数和问题，数形结合思想得到了直接的体现[5]。得出相关线段的值或代数式后，再求其比值或比值的范围与最值即可。反之，如果已知基向量前相应系数和，我们也可以从中推断向量终点的运动轨迹。

参考文献

[1] 代赵玉,许志城,魏俊潮.巧用等和线解决向量双变量问题[J].数理化解题研究,2022(25):95-97.

[2] 吴莉娜.寻问题模型之源 挖教材潜在之能[J].数学通报,2021,60(05):41-45.

[3] 朱亚旸.巧用基底系数的“等和”性质解题[J].高中数学教与学,2023(05):15-16+7.

[4] 朱方宇.等和线在平面向量线性表示中的应用举例[J].中学数学月刊,2021(04):61-62.

[5] 杨瑞强.巧用“等和线”妙解向量题[J].中学数学教学,2022(02):53-56.