2024 年第 6 卷第 2 期
https://aam.oajrc.org/

以圆为背景下三角函数求值问题的解题策略——一道中考选择题的解法探究及反思

陈晓杰

扬州大学　江苏扬州

【摘要】三角形和圆是初中数学最重要的两个几何图形，也是学生学习的重难点，尤其将两者结合起来考察，对学生相关知识点的掌握有很高的要求。本文以一道江苏中考选择题为例，探究以圆为背景来求三角函数值的解题策略，从不同视角探究如何构造直角三角形，不仅有助于学生熟悉三角形的相似和全等、勾股定理、圆的相关性质等知识点，而且培养了学生的逻辑推理能力和转化思想，促进学生核心素养的落实。此外，还对教师教学提出一些建议：教师要关注问题本质，体悟一题多解的重要性；整合教学内容，关注核心概念；注重几何直观，帮助学生发展核心素养。

【关键词】圆的性质；三角形构造；核心素养

【收稿日期】2024 年 5 月 18 日　　**【出刊日期】**2024 年 6 月 21 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240009

Solving strategy of trigonometric function evaluation problem with circle as background——Exploration and reflection on the solution of a multiple choice question in a senior high school examination

Xiaojie Chen

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Triangle and circle are two of the most important geometric figures in junior high school mathematics, and they are also important and difficult for students to learn. In particular, the combination of the two will have high requirements for students to master relevant knowledge points. Taking a Jiangsu high school entrance exam as an example, this paper explores the problem-solving strategy of solving trigonometric function values with circle as the background, and explores how to construct right triangles from different perspectives, which not only helps students to get familiar with the knowledge of triangle similarity and identity, Pythagorean theorem, and the related properties of circles, but also cultivates students' logical reasoning ability and transformation thoughts, and promotes the implementation of students' core literacy. In addition, some suggestions are put forward for teachers' teaching: teachers should pay attention to the essence of the problem and realize the importance of multiple solutions to one problem; Integrate teaching content and focus on core concepts; Focus on geometry and intuition to help students develop core qualities.

【Keywords】Nature of circle; Triangular structure; Core quality

本文对 2023 年苏州中考的最后一道选择题，采用一题多解的形式探讨以圆为背景下求某一个角度三角函数值的解题策略，以期让学生感悟转化思想、掌握在以圆为背景下求特定角的三角函数值时如何构造直角三角形的基本方法，从而提升学生的核心素养。

1 试题呈现

如图，AB 是半圆 O 的直径，点 C 、D 在半圆上，$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，连接 OC 、CA 、OD，过点 B 作 $EB\perp AB$，交 OD 的延长线于点 E 。设 ΔOAC 的面积为 S_1，ΔOBE 的面积为 S_2，若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{3}$，则 $\tan\angle ACO$ 的值为（　　）。

A. $\sqrt{2}$	B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
C. $\frac{7}{5}$	D. $\frac{3}{2}$

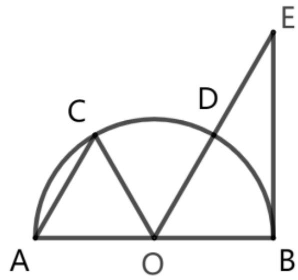

图 1

2 试题简析

本题以圆为背景，设置了求三角形中某一个特定角度的正切值的问题，主要考查了圆的性质、全等（相似）三角形、勾股定理、三角函数等知识点。本题要求$\angle ACO$的正切值，一般有两种情况：一是$\angle ACO$为特殊角，我们可以根据已有知识直接得到它的正切值；二是将$\angle ACO$放入直角三角形中，再根据定义计算出其正切值。但是从题目的选项出发，不难发现，$\angle ACO$不是一个特殊角，因此本题的关键就是构造直角三角形。但是细读题干后，易知$\angle ACO = \angle OAC = \angle COD = \angle BOD$，所以还可以将求$\angle ACO$的正切值转化为求其它角的正切值。

3 思路及解法赏析

思路 1 直接作垂直构造直角三角形，再利用勾股定理得到边之间的数量关系。

解法 1 如图 2，作$AH \perp OC$于点H.

由 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{3}, OB=OC$ 可知，$\frac{AH}{BE}=\frac{2}{3}$. 不妨设$AH=2k, BE=3k$. 根据 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$ 可知，$\angle COD=\angle BOD=\frac{1}{2}\angle COB$. 且 $\angle CAO=\frac{1}{2}\angle COB$, 所以 $\angle CAO=\angle BOD$. 又因为 $OA=OC$, 所以 $\angle ACO=\angle CAO=\angle BOD$. 根据 $AH \perp OC, BE \perp OE$, 可证 $\Delta AHC \sim \Delta EBO$, 得 $\frac{AH}{BE}=\frac{CH}{OB}$, 所以 $CH=\frac{2}{3}OB, OH=\frac{1}{3}OB$. 再根据勾股定理，$OA^2=AH^2+OH^2$, 得 $OA=\frac{3\sqrt{2}}{2}k, CH=\sqrt{2}k$. 所以 $\tan\angle ACO=\frac{AH}{CH}=\sqrt{2}$.

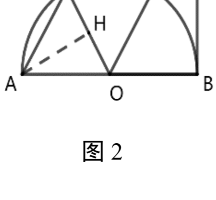

图 2

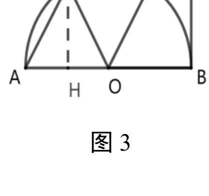

图 3

反思上述解法，由于ΔOAC是等腰三角形，$\angle ACO=\angle OAC$，因此如图3，我们作$AH\perp OA$，同解法1可得$\tan\angle OAC=\sqrt{2}$，即$\tan\angle ACO=\sqrt{2}$。

点评上述方法都是直接作垂直构造直角三角形。因为题目中给出的已知条件中有ΔAOC与ΔBOE的面积比，而$OA=OB=OC$，作OA或OC边上的高，就可以得到这条高与BE的比，再利用相似三角形和勾股定理就能得到新构造的直角三角形三边的等量关系，从而求出$\angle ACO$的正切值。这种方法也是学生最易想到的。

思路2 利用垂径定理构造直角三角形。

解法2 如图4，取AC中点H，连接OH.

易知$\angle CAB=\angle COD=\angle BOD$。因为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{3},OA=OB,\ OH=OA\cdot\sin\angle CAB,\ BE=OE\cdot\sin\angle BOD$。所以$\frac{AC}{OE}=\frac{2}{3}$.不妨设$AC=2k,OE=3k$,则$CH=AH=k$.易证$\Delta CHO\sim\Delta OBE$,可得$OC=\sqrt{3}k$.由勾股定理可得$OC=\sqrt{3}k,CH=k,OH=\sqrt{2}k$.所以$\tan\angle ACO=\frac{OH}{CH}=\sqrt{2}$.

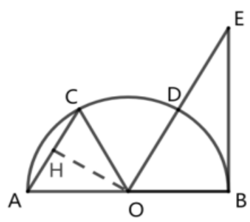

图4

解法3 如图5，连接BC交OD于点H.

易知$\angle CAO=\angle ACO=\angle COD=\angle BOD,\ \frac{AC}{OE}=\frac{2}{3}$.不妨设$AC=2k,OE=3k$.因为$OA=OB,\ CH=BH$,所以$OH$为$\Delta ABC$的中位线，$OH=\frac{1}{2}AC=k$.易证$\Delta BOH\sim\Delta EOB$.所以$\frac{OH}{OB}=\frac{OB}{OE},OB=\sqrt{3}k$.在$\text{Rt}\Delta BOH$中,$OB=\sqrt{3}k,OH=k,BH=\sqrt{2}k$.所以$\tan\angle BOH=\sqrt{2}$,即$\tan\angle ACO=\sqrt{2}$.

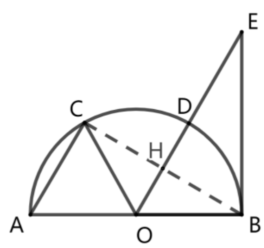

图5

思路3 利用圆的性质构造直角三角形。

解法4 如图6，连接BC。

易知$\angle CAO=\angle ACO=\angle COD=\angle BOD,\frac{AC}{OE}=\frac{2}{3}$.不妨设$AC=2k,OE=3k$.根据$AB$为直径，可得$\angle ACB=90^\circ=\angle OBE$.又因为$\angle CAB=\angle BOD$,易证$\Delta ACB\sim\Delta OBE$.所以$\frac{AC}{OB}=\frac{AB}{OE},\ AB=2\sqrt{3}k$.在$\text{Rt}\Delta ACB$中，$AB=2\sqrt{3}k,AC=2k,BC=2\sqrt{2}k$.则$\tan\angle CAO=\sqrt{2}$.

即 $\tan\angle ACO$ 也等于 $\sqrt{2}$。

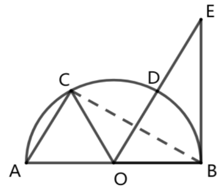

图 6

观察上述图形，我们还可以补全半圆，如图 7 所示，延长 CO 交 $\odot O$ 于点 H，连接 AH，构造 $Rt\Delta ACH$。同上述步骤可得 $\tan\angle ACO=\sqrt{2}$。

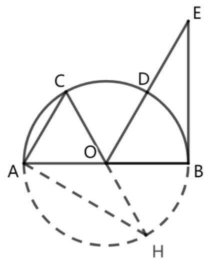

图 7

点评解法 2 和解法 3 都是利用了圆的垂径定理及其推论来构造直角三角形。结合三角形面积比以及三角函数的定义不难得出 $\dfrac{AC}{OE}=\dfrac{2}{3}$，再通过相似三角形和勾股定理求解。而解法 4 是利用圆的性质“圆的直径所对应的圆周角为直角”来构造的直角三角形。而这几种解法都需要熟悉三角函数的定义，将面积比转化为边之比，具有一定难度。

思路 4 利用三角形间的全等构造直角三角形。

解法 5 如图 8，连接 CE。

易证 $\Delta COE\cong\Delta BOE$，所以 $\angle OCE=\angle OBE=90^\circ.$ 又因为 $\dfrac{AC}{OE}=\dfrac{2}{3},$ 设 $AC=2k,OE=3k.$ 再取 OE 中点 F，以点 F 为圆心，OF 为半径，作四边形 $OBEC$ 的外接圆，连接 CF。所以 $OF=CF=\dfrac{3}{2}k,\ \angle FOC=\angle FCO.$ 然后证 $\Delta ACO\sim\Delta OCF$，可得 $\dfrac{OC}{CF}=\dfrac{AC}{OC},OC=\sqrt{3}k.$ 在 $Rt\Delta OCE$ 中，$OC=\sqrt{3}k,OE=3k,CE=\sqrt{6}k.$ 可得 $\tan\angle COE=\sqrt{2},$ 即 $\tan\angle ACO=\sqrt{2}.$

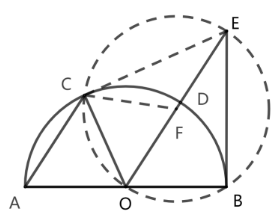

图 8

点评解法 5 是观察到 ΔCOE 和 ΔBOE 全等，从而得到 ΔCOE 为直角三角形。通过 $\angle OCE=\angle OBE=90^{\circ}$ 发现 O、B、E、C 四点共圆，构造辅助圆发现 ΔACO 和 ΔOCF 相似，对其求解。这种解法其实并不复杂，主要是需要同学们对几何图形间的全等（相似）有较强的洞察能力和逻辑推理能力。

5 解题反思

5.1 关注问题本质，体悟一题多解

一题多解不是单纯地炫耀解题技巧，而是在不同的解题过程中促进学生对问题相关知识点的理解，培养学生的类比和迁移能力[1]。本文就是利用一道中考的选择压轴题，通过挖掘试题中的隐含信息，抓住求非特殊角三角函数值要构造直角三角形的思路，尝试通过圆的相关性质来建立已知条件与所求三角函数值之间的关联，进而探寻不同的解题思路。因此，在解题教学中，教师要引导学生多层次、多角度思考问题，尽可能全面地掌握问题要考察的知识点，从而做到“解一题，通一类”，最终实现数学思维的有效提升[2]。

5.2 整合教学内容，关注基本概念

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求“通过合适的主题整合教学内容，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展核心素养。”本文以求非特殊角的三角函数值为主题，将圆的相关性质、相似三角形等相关教学内容联系起来，不仅提升了学生的逻辑推理能力，还培养了学生的转化意识[3]。同时，基于圆这一核心概念，关联相关的知识点和方法：垂径定理；同圆或者等圆中，等弧所对的弦相等、圆心角相等；直径所对的圆周角为直角、四点共圆等，引导学生从教材的基础知识和核心概念出发，建立起有意义的知识结构，以便于更好地探寻一题多解。

5.3 注重几何直观，发展核心素养

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求，建立“数”与“形”的联系，构建数学问题的直观模型。几何直观是指，借助于见到的或者想象出来的几何图形的形象关系，对数学的研究对象（空间形式和数量关系）进行直接认知、整体把握的能力[4]。本文从一道中考的选择压轴题出发，需要学生们对相似三角形、圆等几何图形进行直观想象，从而对于辅助线的添加有一个更加清晰的思路。因此，在日常的几何教学中，教师可以通过分析如何添加辅助线、展示几何图形的动态变化过程等培养学生的几何直观意识，强化学生的数学推理能力，逐步培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，让数学核心素养的培养在教学中真正落实[5]。

参考文献

[1] 郑学涛.利用二次函数求面积最值[J].数理化学习(初中版),2020,(06):19-21.
[2] 时淑君.把握本质寻突破发展思维提素养——一道折叠题的解法探究与反思[J].初中数学教与学,2024,(03):22-24+27.
[3] 门桐宇,王桂丽,郭凌霄.促进深度学习的高中数学教学实践研究——以“含参数不等式恒成立问题”为例[J].中小学教学研究,2023,24(03):50-57.
[4] 王广锋.挖掘图形本质提升数学素养[J].初中数学教与学,2024,(02):40-43.
[5] 曹桐军.中点引领素养立意——一道几何试题的解法赏析和变式探究[J].初中数学教与学,2023,(13):14-16.