数列通项公式的求解方法

朱新红，官梦鸽，魏俊潮

扬州大学　江苏扬州

【摘要】数列是高中数学的重要知识内容，已知递推关系求解数列通项公式是学习数列的一个重点和难点，也是考试中的一个必考点。该类题目形式灵活多变、技巧性强.本文通过对近几年高考以及各地模拟考试题的分析，整理归纳出求解数列通项公式的几种常见方法。

【关键词】数列；通项公式；待定系数法

【收稿日期】2023年3月21日　【出刊日期】2023年5月15日　【DOI】10.12208/j.aam.20231108

The method of solving general term formula of sequences

Xinhong Zhu, Mengge Guan, Junchao Wei

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Sequence is an important knowledge in high school mathematics. It is a key and difficult point to solve the general term formula of sequences with known recursive relation, and it is also a required point in the National College Entrance Examination. This kind of question condition is flexible and changeable, and it needs some skill to solve this question. Based on the analysis of questions in the college entrance examination and the simulation examination in recent years, this article summarizes several common methods for solving the general term formula of the sequences.

【Keywords】 Sequence; The general term formula; Undetermined coefficient method

数列作为一种特殊的函数，在高中数学知识板块中占有重要地位，也与实际生活有着紧密的联系。《2017年版普通高中数学课程标准》指出数列的内容要求包括以下四点：数列的概念、等差数列、等比数列和数学归纳法。结合近几年高考以及各地区模拟考试可以发现针对数列的考察主要包括数列通项公式和数列求和，若要提高题目难度会进一步考察学生对放缩法的灵活运用。数列的通项公式相当于函数的解析式，一般地研究数列会从其通项公式着手，再进一步探究其性质，因此求解数列的通项公式通常是研究数列的第一步。本文主要围绕数列通项公式，给出几种求解数列通项公式的方法，希望能给读者提供一些参考价值。

1 公式法

公式法是指利用等差数列和等比数列的通项公式，通过设置未知量，再根据已知条件构建方程求出未知量，从而得出通项公式.运用公式法求数列的通项公式前提是已知该数列为等差数列或等比数列[1]。

例1 （辽宁省沈阳市2022届高三上学期教学质量检测（一））已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=14$，$b_2b_4=a_6$，且$b_n>0$.求数列$\{b_n\}$的通项公式。

解析：设$\{a_n\}$的公差为d，则$a_2+a_4=2a_1+4d=14$，得$d=3$，则：

$$a_n=a_1+(n-1)d=3n-2，a_6=16$$

设$\{b_n\}$的公比为q，且$q>0$，则$b_2b_4={b_1}^2q^4=q^4=16$，得$q=2$，则：

$$b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$$

2 累加法

若递推关系形如：$a_{n+1}-a_n=f(n)$，其中$f(n)$可求和，则求该条件下数列的通项可以考虑累加法.在解

题过程中应注意n的范围，对不在范围内的项要记得检验，例如若$n \geq 2$，则要记得检验a_1是否满足公式。

例 2 （江苏省苏锡常镇四市 2022 届高三教学情况调研（一））已知数列$\{a_n\}$，$a_1 = 1$，且$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$，$n \in N^*$.求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$。所以：

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1}, \\ a_3 - a_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}, \\ \cdots \\ a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}, \end{cases}$$

其中$n \geq 2$。

累加得$a_n - a_1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{1}$，又因为$a_1 = 1$，所以$a_n = \frac{1}{n}(n \geq 2)$。当$n = 1$时，$a_1 = 1$也符合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = \frac{1}{n}$。

3 累乘法

若递推关系形如：$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$，其中$f(1) \cdot f(2) \cdots f(n-1)$易于化简，则求该条件下数列的通项可以考虑累乘法。

例 3 （重庆市 2022 届高三 3 月考试）在数列中$\{a_n\}$中，已知$a_1 = 1$，$na_{n+1} = (n+1)a_n$.求$\{a_n\}$的通项公式。

解析：因为$na_{n+1} = (n+1)a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$。所以

$$\begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1}, \\ \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{3}{2}, \\ \cdots \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n}{n-1}, \end{cases}$$

其中$n \geq 2$。

累乘得$\frac{a_n}{a_1} = \frac{n}{1}$，又因为$a_1 = 1$，所以$a_n = n(n \geq 2)$。当$n = 1$时，$a_1 = 1$也符合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = n$。

4 和项转换法

若已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，则$a_n = \begin{cases} S_1, n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$.注意对$n$进行分类之后若能合并一定要合并。根据上述和化项公式，若已知条件中的关系式既包含a_n又包含S_n，则一般有两种思路求数列$\{a_n\}$的通项公式，一是通过作差将和转化成项，二是将项转化成和，先求前n项和，再利用公式求数列$\{a_n\}$的通项公式[2]。

例 4 （山东省济宁市 2022 届高三第一学期质量检测）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$4a_n = 3S_n + 2$.求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：（方法一：和化项）因为$4a_n = 3S_n + 2$，所以当$n \geq 2$时，$4a_{n-1} = 3S_{n-1} + 2$，所以$4a_n - 4a_{n-1} = 3S_n - 3S_{n-1} = 3a_n$，整理得$a_n = 4a_{n-1}$；当$n = 1$时，$4a_1 = 3a_1 + 2$，解得$a_1 = 2$。所以数列$\{a_n\}$是以2为首项、4为公比的等比数列，所以$a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$。

（方法二：项化和）因为$4a_n=3S_n+2$，所以当$n\geq 2$时，有：$4a_n=4S_n-4S_{n-1}=3S_n+2$，化简得$S_n=4S_{n-1}+2$，可得$S_n+\frac{2}{3}=4(S_{n-1}+\frac{2}{3})$；当$n=1$时，$4S_1=3S_1+2$，解得 $S_1=2$.所以数列$\left\{S_n+\frac{2}{3}\right\}$是以$\frac{8}{3}$为首项、4为公比的等比数列，所以$S_n=\frac{8\times 4^{n-1}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(4^n-1)$。当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{3}(4^n-4^{n-1})=2^{2n-1}$，且$a_1=2$也符合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{2n-1}$。

5 待定系数法

待定系数法的核心思想是构造等比数列或等差数列，再利用公式法求出构造的新数列的通项公式，最终得到所求数列的通项公式。递推关系式形如：$a_{n+1}=pa_n+b_n$(其中$\{b_n\}$为等差或等比数列)可通过待定系数法求出数列$\{a_n\}$的通项公式，下面将具体分析$\{b_n\}$为等差数列和等比数列的情形[3]。

5.1 "$a_{n+1}=pa_n+qn+r$"型，即$\{b_n\}$为等差数列

例 5 （海南省 2022 届高三诊断性测试）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$2S_n=a_{n+1}+2n-4$。求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：因为递推关系式中涉及到前n项和，所以可用和项转换法求通项公式，如果用和化项的方法，则当$n\geq 2$时可得递推关系式：$a_{n+1}=3a_n-2$，即一般式中$p=3,q=0,r=-2$。运用待定系数法引入λ使得$a_{n+1}+\lambda=3(a_n+\lambda)$，解出$\lambda=-1$，即$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，即$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$；再检验$\frac{a_2-1}{a_1-1}$是否也为3，经检验 $\frac{a_2-1}{a_1-1}=3$，所以数列$\{a_n-1\}$是以3为首项、3为公比的等比数列，所以$a_n-1=3^n$，即$a_n=3^n+1$。

如果用项化和的方法，则可得递推关系式：$S_{n+1}=3S_n-2n+4$，即一般式中：

$$p=3,q=-2,r=4.$$

运用待定系数法引入λ,μ使得$S_{n+1}+\lambda(n+1)+\mu=3(S_n+\lambda n+\mu)$，解出：

$\lambda=-1,\mu=\frac{3}{2}$, 即$S_{n+1}-(n+1)+\frac{3}{2}=3(S_n-n+\frac{3}{2})$, 即$\frac{S_{n+1}-(n+1)+\frac{3}{2}}{S_n-n+\frac{3}{2}}=3$，所以数列$\left\{S_n-n+\frac{3}{2}\right\}$是以$\frac{9}{2}$为首项、3为公比的等比数列，再用公式法可得$\left\{S_n-n+\frac{3}{2}\right\}$的通项公式，即可求出$S_n$，最后再利用公式可求出$a_n$。一般地，递推关系为$a_{n+1}=pa_n+qn+r$，其中$p\neq 0$和1，用待定系数法求通项首先引入待定的系数$\lambda,\mu$使得$a_{n+1}+\lambda(n+1)+\mu=p(a_n+\lambda n+\mu)$，再解出 λ和μ，$\lambda=\frac{q}{p-1}$, $\mu=\frac{r}{p-1}+\frac{q}{(p-1)^2}$, 若首项$a_1+\lambda+\mu\neq 0$，则构造的新数列。$\{a_n+\lambda n+\mu\}$为等比数列。若$q=0$，则$\lambda=0$.若首项$a_1+\lambda+\mu=0$，则不能构造出等比数列，此时待定系数法不可行，换个思路，将等式两边同除p^{n+1}，构造数列$\{\frac{a_n}{p^n}\}$，用累加法可以求出数列$\{\frac{a_n}{p^n}\}$的通项公式，从而得到数列$\{a_n\}$的通项公式。

5.2 "$a_{n+1}=sa_n+t^{n+1}$"型，即$\{b_n\}$为等比数列

例 6（江苏省苏州市 2022 届高三期初调研）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且：
$S_n=2a_n-2^{n+1}+2(n\in N^*)$.求$\{a_n\}$的通项公式。

解析：当$n=1$时，$S_1=a_1=2a_1-4+2$，则$a_1=2$。

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2^{n+1}+2-(2a_{n-1}-2^n+2)$，可得：

$a_n=2a_{n-1}+2^n$，即一般式中$s=t=2$，等式两边同除2^n得$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$，且：

$\frac{a_1}{2}=1$，所以数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是以1为首项、公差为1的等差数列，所以$\frac{a_n}{2^n}=n$，从而：

$$a_n=n\cdot 2^n$$

改编：若s,t不相等，假设$s=-1,t=2$，即$a_n=-a_{n-1}+2^n$，则求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：等式两边同除2^n得$\frac{a_n}{2^n}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$，若令 $\frac{a_n}{2^n}=c_n$，则$c_n=-\frac{1}{2}\cdot c_{n-1}+1$，可以发现"$a_{n+1}=sa_n+t^{n+1}$"型通过将等式两边同除$t^{n+1}$就转化成：

"$a_{n+1}=pa_n+qn+r$"型。用待定系数法引入λ使得$c_n+\lambda=-\frac{1}{2}(c_{n-1}+\lambda)$，解出$\lambda=-\frac{2}{3}$，即$c_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}(c_{n-1}-\frac{2}{3})$，且$\frac{a_1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，所以数列$\{c_n-\frac{2}{3}\}$是以$\frac{1}{3}$为首项、公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，所以$\frac{a_n}{2^n}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，从而$a_n=\frac{2}{3}[(-1)^{n-1}+2^n]$。

一般地，递推关系为$a_{n+1}=sa_n+t^{n+1}$，其中$s\neq 0$和1，$t\neq 0$和± 1，求通项通常是将等式两边同除t^{n+1}，从而把t^{n+1}化为1，得到$\frac{a_{n+1}}{t^{n+1}}=\frac{s}{t}\cdot\frac{a_n}{t^n}+1$，这是一般式$a_{n+1}=pa_n+qn+r$中$q=0,r=1$的特殊情形，用待定系数法引入$\lambda$使得$\frac{a_{n+1}}{t^{n+1}}+\lambda=\frac{s}{t}(\frac{a_n}{t^n}+\lambda)$，解出$\lambda=\frac{t}{s-t}$，若$\frac{a_1}{t}+\lambda\neq 0$，则数列$\{\frac{a_n}{t^n}+\lambda\}$是以$\frac{a_1}{t}+\lambda$为首项、公比为$\frac{s}{t}$的等比数列，进一步能得出数列$\{a_n\}$的通项公式。

6 “不动点”法

对于一个函数$f(x)$，我们把满足$f(m)=m$的值$x=m$称为函数$f(x)$的“不动点”。利用“不动点法”可以构造新数列，求数列的通项公式。

定理 1：若$f(x)=ax+b(a\neq 0,1)$，p是$f(x)$的不动点.数列$\{a_n\}$满足：

$a_{n+1}=f(a_n)$，则$a_{n+1}-p=a(a_n-p)$，即$\{a_n-p\}$是公比为a的等比数列[3]。

证明：因为p是$f(x)$的不动点，所以$ap+b=p$，即$b=p-ap$；

因为$a_{n+1}=f(a_n)$，所以$a_{n+1}=a\cdot a_n+b$，

则$a_{n+1}-p=a\cdot a_n+b-p=aa_n-ap=a(a_n-p)$，即$\{a_n-p\}$是公比为$a$的等比数列.

定理 2：设$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0,ad-bc\neq 0)$，数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=f(a_n)$，

$a_1\neq f(a_1)$.若$f(x)$有两个相异的不动点p,q，则$\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=k\cdot\frac{a_n-p}{a_n-q}$.

证明：因为p,q是$f(x)$两个相异的不动点，所以$\frac{ap+b}{cp+d}=p,\frac{aq+b}{cq+d}=q$，化简得：

$$dp=ap+b-cp^2，dq=aq+b-cq^2；$$

$$a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d};$$

$$a_{n+1}-p=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}-p=\frac{aa_n+b-cpa_n-dp}{ca_n+d}$$

$$=\frac{aa_n+b-cpa_n-ap-b+cp^2}{ca_n+d}=\frac{(a_n-p)(a-cp)}{ca_n+d}$$

$$a_{n+1}-q=\frac{(a_n-q)(a-cq)}{ca_n+d}$$

所以：$\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=\frac{a-cp}{a-cq}\cdot\frac{a_n-p}{a_n-q}$

例 7（1）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式[4]。

（2）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{7a_n-2}{a_n+4}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：（1）由定理 1 可设$f(x)=\frac{1}{2}x+1$，

令$f(x)=x$，即$\frac{1}{2}x+1=x$，解出$x=2$，

所以$x=2$是函数$f(x)=\frac{1}{2}x+1$的不动点，

所以$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$，所以数列$\{a_n-2\}$是以$-1$为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以$a_n-2=-1\times(\frac{1}{2})^{n-1}$，

即$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},n\in N^*$。

（2）由定理 2 可设$f(x)=\frac{7x-2}{x+4}$，

令$f(x)=x$，即$\frac{7x-2}{x+4}=x$，解出$x_1=1,x_2=2$，

所以1和2是$f(x)=\frac{7x-2}{x+4}$的不动点，

所以$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\frac{\frac{7a_n-2}{a_n+4}-1}{\frac{7a_n-2}{a_n+4}-2}=\frac{7a_n-2-a_n-4}{7a_n-2-2a_n-8}=\frac{6}{5}\cdot\frac{a_n-1}{a_n-2}$，所以数列$\left\{\frac{a_n-1}{a_n-2}\right\}$是以首项为：

$\frac{a_1-1}{a_1-2}=2$，公比为$\frac{6}{5}$的等比数列，

所以$\frac{a_n-1}{a_n-2}=2\times(\frac{6}{5})^{n-1}$，

即$a_n=\frac{4\cdot 6^{n-1}-5^{n-1}}{2\cdot 6^{n-1}-5^{n-1}},n\in N^*$。

7 “取倒数”法

一般地，递推关系为$a_{n+1}=\frac{ta_n}{pa_n+q}\,(p,q\neq 0)$通常采用取倒数的方法求解通项公式，即将$a_{n+1}=\frac{ta_n}{pa_n+q}$变形为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{q}{t}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{p}{t}$，然后将$\{\frac{1}{a_n}\}$看成新数列，用待定系数法求其通项，最后再取倒数得到数列$\{a_n\}$的通项公式。

例 8（江苏省南通市 2022 届高三 9 月教学质量监测）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{3}{2}$，且$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\,(n\geq 2,n\in N^*)$。求数列$\{a_n\}$的通项公式[5]。

解析：因为$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$，取倒数得$\frac{1}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+n-1}{3na_{n-1}}$，两边同乘$n$得$\frac{n}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+n-1}{3a_{n-1}}$，即$\frac{n}{a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{2}{3}$，再用待定系数得$\frac{n}{a_n}-1=\frac{1}{3}(\frac{n-1}{a_{n-1}}-1)$，且$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{3}$，所以数列$\{\frac{n}{a_n}-1\}$是以$-\frac{1}{3}$为首项、公比为$\frac{1}{3}$的等比数

列，所以 $\frac{n}{a_n}-1=-\frac{1}{3^n}$，进而求得$a_n=\frac{n\cdot 3^n}{3^n-1}$。

参考文献

[1] 杜谞.紧扣递推公式,巧用待定系数法求四类数列通项公式[J].高中数理化,2021(10):3-4;

[2] 杜超.浅谈数列通项公式求解方法[J].理科考试研究,2021,28(1):19-21;

[3] 黄耿跃.揭开不动点求数列通项公式的教学困惑[J].中学数学研究,2022(08):16-18.

[4] 许万成.利用递推关系求解数列通项公式的解题策略[J].数理化解题研究,2019(25):26-27;

[5] 黄耿跃.揭开不动点求数列通项公式的教学困惑[J].中学数学研究,2022(08):16-18.