广义 Nekrasov 矩阵的新判定条件

刘 丹[1*]，孙 旭[1]，班雪映[1]，周立新[2]

[1]沈阳航空航天大学理学院 辽宁沈阳
[2]桂林航空工业学院理学院 广西桂林

【摘要】广义 Nekrasov（非奇异 H-矩阵）矩阵在经济数学、控制理论、数值代数等诸多领域中发挥了重要的作用，本文研究了广义 Nekrasov 矩阵的判定条件问题。从矩阵的元素出发，利用不等式放缩的方法，构造正对角矩阵因子，给出了广义 Nekrasov 矩阵几种新的判别方法，推广了一些已有的结果.最后用数值算例证明了所得结论的有效性。

【关键词】Nekrasov 矩阵；非奇异 H-矩阵；广义 Nekrasov 矩阵
【基金项目】广西自然科学基金（2023GXNSFAA026514），辽宁省教育厅项目（JYTMS20230281）
【收稿日期】2024 年 8 月 18 日 【出刊日期】2024 年 9 月 5 日 【DOI】10.12208/j.aam.20240023

New criteria for generalized Nekrasov matrices

Dan Liu[1], Xue Sun[1], Xueying Ban[1], Lixin Zhou[2]*

[1]College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang, Liaoning
[2]College of Science, Guilin University of Aeronautical Technology, Guilin, Guangxi

【Abstract】Generalized Nekrasov(non-singular H-matrix) matrix plays an important role in many fields such as economic mathematics, control theory, numerical algebra, etc. In this paper, the decision conditions of generalized Nekrasov matrix are studied. Starting from the elements of matrix, the positive diagonal matrix factors are constructed by means of inequality reduction, and several new discriminant methods for generalized Nekrasov matrix are given. Finally, a numerical example is used to illustrate the validity of the conclusion.

【Keywords】Nekrasov matrix; Non-singular H-matrix; Generalized Nekrasov matrix

1 引言

广义 Nekrasov 矩阵在计算数学、矩阵理论以及控制理论等领域有着广泛应用.最近几年，诸多学者研究了广义 Nekrasov 矩阵的性质及应用[1-6]。目前为止，有关 Nekrasov 矩阵的判定定理和判定手段有很多，但对于高阶大型矩阵来说，运用常规方法进行判定有一定困难，而广义 Nekrasov 矩阵的判定是许多实际问题的研究得以解决的基础，因此，怎样简洁而高效的判定一个矩阵是否为广义 Nekrasov 矩阵具有重要的理论和实际意义.黄廷祝和黎稳利用弱 Nekrasov 矩阵的性质，刘建州和郭爱丽利用广义 Nekrasov 矩阵的定义，徐仲、王银燕和陆全等构造递进的压缩因子分别给出了广义 Nekrasov 矩阵的若干判定条件[7-11]。本文在已有文献的基础上，用矩阵不等式，通过构造不同的对角矩阵因子，利用不等式放缩技巧，给出广义 Nekrasov 矩阵判定的新条件，推广了已有文献的主要结果.最后用数值算例说明了所得结果的有效性。

本文采用如下的符号和定义：用 $C^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$ 复矩阵的集合， $N=\{1,2,...,n\}$ 。将 N 进行划分并记

$$N_1=\{i\in n\mid 0<|a_{ii}|=R_i(A)\}$$

[*]通讯作者：刘丹（1999-）女，研究生，研究方向：矩阵理论。

$$N_2=\{i\in n\mid 0<|a_{ii}|<R_i(A)\}$$

$$N_3=\{i\in n\mid |a_{ii}|>R_i(A)\}$$

$$\tilde{N}_1=\{i\in n\mid 0<|a_{ii}|\neq R_i(A)\}$$

$$\tilde{N}_2=\{i\in n\mid 0<|a_{ii}|\geq R_i(A)\}$$

$$\tilde{N}_3=\{i\in n\mid 0<|a_{ii}|\leq R_i(A)\}$$

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，记

$$l_i(A)=\sum_{i\in N_1,t<i}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}+\sum_{i\in N_2,t<i}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}+\sum_{i\in N_3,t<i}|a_{it}|\frac{R_t(A)}{|a_{tt}|}，\ i\in N \tag{1.1}$$

$$P_i(A)=\sum_{j<i}|a_{ij}|，\ \forall i\in N \tag{1.2}$$

$$R_1(A)=P_1(A) \tag{1.3}$$

$$R_i(A)=\sum_{j<i}|a_{ij}|\frac{R_t(A)}{|a_{jj}|}+\sum_{j>i}|a_{ij}|，\ 2\leq i\leq n \tag{1.4}$$

$$R^{S_j}{}_i(A)=\sum_{t<i}|a_{ij}|\frac{R^{S_j}{}_i(A)}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in S_j}|a_{it}|，\ \forall i,j\in N \tag{1.5}$$

$$l^{S_j}{}_i(A)=\sum_{t<i}|a_{ij}|\frac{R^{S_j}{}_i(A)}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in S_j}|a_{it}|，\ \forall i,j\in N \tag{1.6}$$

显然，$N_1\cap N_2=\varnothing$，$N_1\cap N_3=\varnothing$，$N_3\cap N_2=\varnothing$.如果 $N_1\cup N_2=\varnothing$，A 是广义 Nekrasov 矩阵；如果 $N_1=\varnothing$，那么由定义可知 A 不是广义 Nekrasov 矩阵。如果 A 的主对角元素有零元，那么 A 一定不是广义 Nekrasov 矩阵，因此我们总假设 $N_1\cap N_2$，$N_3\neq\varnothing$，A 的主对角元素都非零。

定义 1.1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 $|a_{ii}|\geq R_i(A)$，$i\in N$，那么 A 是弱 Nekrasov 矩阵，记为 $A\in N_0$；若 $|a_{ii}|>R_i(A)$，$i\in N$，那么 A 是弱 Nekrasov 矩阵，记为 $A\in N$；若存在正对角矩阵 X 使得 $AX\in N$，则称 A 为广义 Nekrasov 矩阵，记为 $A\in N^*$。

引理 1.1[8]设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，当 $B=AX$ 时，有

$$l_i(B)\leq l_i(A)，\ i\in N \tag{1.7}$$

其中 X 是一个正对角矩阵，$X=diag(x_1,x_2,...,x_n)$，而且当 $\forall i\in N$ 时，有 $x_i\leq 1$。

引理 1.2[13]设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，正对角矩阵 $D=diag(d_1,d_2,...,d_n)$。任给 N 的一组划分 $S_1,S_2...,S_k$，若数列 $w_1,w_2...,w_k$ 满足

$$d_i\leq w_i，\ \forall i\in S_j，\ j\in\{1,2,...,k\} \tag{1.8}$$

则

$$l_i(AD)\leq\sum_{j=1}^{k}w_jl_i^{S_j}(A) \tag{1.9}$$

注 1：显然引理 1.2 的适用范围比引理 1.1 更广。

2 主要结果

这一节将从矩阵的元素出发，利用不等式放缩技巧，在文[14]的基础上，构造正对角矩阵和递进系数，给出广义 Nekrasov 矩阵的新判别法，改进了文[14]的主要结果。

定理 2.1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对 $\forall i\in N_2$，有

$$|a_{ii}|>\frac{R_i(A)}{R_i(A)-|a_{ii}|}\left[\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}\right.$$

$$\left.+\eta l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right] \tag{2.1}$$

且 $|a_{ii}|\neq l_i^{N_1}(A)-\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|$，$\forall i\in N_1$，其中

$$P_i(A)=R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\gamma R_i^{N_3}(A)$$

$$\gamma=\max_{i\in N_3}\left(\frac{R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)}{|a_{ii}|-R_i^{N_3}(A)}\right)$$

$$\delta=\max_{i\in N_2}\left(\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)}\right)$$

$$\eta=\max_{i\in N_3}\left(\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}\right)$$

则 A 为广义 Nekrasov 矩阵。

证明：由 $\gamma=\max_{i\in N_3}\left(\frac{R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)}{|a_{ii}|-R_i^{N_3}(A)}\right)$，显然对 $\forall i\in N_3$，因为 $0\leq\gamma<1$，且

$$\gamma|a_{ii}|\geq R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\gamma R_i^{N_3}(A) \tag{2.2}$$

即 $P_i(A)=\gamma|a_{ii}|$，所以有

$$0\leq\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}\leq\gamma<1. \tag{2.3}$$

在文[14]中，对 $\forall i\in N_2$，有

$$|a_{ii}|\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)}>\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}$$

$$+\eta l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|} \tag{2.4}$$

取充分小的 $\varepsilon>0$，使得对 $\forall i\in N_3$，有 $0<\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon<1$，且对于 $\forall i\in N_2$，有

$$\varepsilon\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|<|a_{ii}|\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)}-\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|-l_i^{N_1}(A)-\delta l_i^{N_2}(A)-\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}$$

$$-\eta l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}.$$

构造对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2,...,x_n)$，其中

$$x_i=\begin{cases}1,\ i\in N_1,\\ \dfrac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)},i\in N_2,\\ \dfrac{P_i(A)}{|a_{ii}|},i\in N_3.\end{cases}$$

显然对 $\forall i\in N$，都有 $0<x_i\le 1$，所以 X 为正对角矩阵。令 $B=AX=(b_{ij})$，由引理 1.1 可知 $l_i(B)\le l_i(A)$ ，$i\in N$.下面证明 B 为 Nekrasov 矩阵。

1）对 $\forall i\in N_1$，有 $|a_{ii}|\ne l_i^{N_1}(A)-\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|$，且 $\forall i\in N_2$，可以得到 $0<\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}\le\gamma<1$，$\forall i\in N_3$，有 $0<\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon<1$ ，所以

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(B)+\delta l_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\eta l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$\le l_i(A)+\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|$$

$$=R_i(A)=|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

2）对 $\forall i\in N_2$

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(B)+\delta l_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\eta l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$\le\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\eta l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$<\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\eta l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right)$$

$$+\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)}-\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|-l_i^{N_1}(A)-\delta l_i^{N_2}(A)-\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}-\eta l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right)$$

$$=|a_{ii}|\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)}=|b_{ii}|$$

3）对 $\forall i\in N_3$，因为 $\forall i\in N_2$，有 $0<\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}<1$，所以

$$R_i(B)=\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(B)+\delta l_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\eta l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$<\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|+\eta l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$\le\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|+\eta l_i^{N_3}(A)+\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|$$

$$=P_i(A)+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|<P_i(A)+\varepsilon|a_{ii}|=\left(\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon\right)|a_{ii}|$$

综上所述，对 $\forall i\in N$，都有 $|b_{ii}|>R_i(B)$，所以 $B=AX\in N$，$A\in N^*$，即 A 为广义 Nekrasov 矩阵。

下面我们对文[14]的条件进一步改进，得到了如下更实用且判定范围更广的广义 Nekrasov 矩阵的新判别条件。

定理 2.2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对 $\forall i\in N_2$，有

$$w_i|a_{ii}|>\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+l_i^{N_1}(A)+\zeta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t$$

$$+\varphi l_i^{N_3}(A)+h\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\tag{2.5}$$

且对于 $\forall i\in N_1$，存在 $t\in N_2\cup N_3$，使得 $|a_{ii}|\ne 0$，其中

$$w_i=\frac{R_i(A)}{R_i(A)+|a_{ii}|},\quad i\in N_2\tag{2.6}$$

$$\delta=\max_{i\in N_2}\{w_i,\gamma\}\tag{2.7}$$

$$\zeta=\max_{i\in N_2}\left(\frac{R_i(A)}{R_i(A)+|a_{ii}|}\right)\tag{2.8}$$

$$P_{ir}(A)=R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\varphi l_i^{N_3}(A)+\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|},\quad i\in N_3\tag{2.9}$$

$$\varphi=\max_{i\in N_3}\left(\frac{P_i(A)}{|a_{ii}|}\right)\tag{2.10}$$

$$\gamma=\max_{i\in N_3}\left(\frac{R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)}{|a_{ii}|-R_i^{N_3}(A)}\right)\tag{2.11}$$

$$h=\max_{i\in N_3}\left(\frac{l_i^{N_1}(A)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta l_i^{N_1}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t}{P_{ir}(A)-\varphi l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{ir}(A)}{|a_{tt}|}}\right)\tag{2.12}$$

则 A 为广义 Nekrasov 矩阵。

证明：对于 $\forall i\in N_3$，因为 $0\le\gamma<1$，由 γ，$P_i(A)$，$P_{ir}(A)$ 的定义及式（2.5）和（2.6）可知道 $P_{ir}(A)\le P_i(A)$，且

$$\gamma|a_{ii}|\ge R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\gamma l_i^{N_3}(A)\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}+\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}$$

即对 $\forall i\in N_3$，有 $P_{ir}(A)\le r|a_{ii}|$，从而

$$0<\frac{P_{ir}(A)}{|a_{ii}|}\le\gamma<1,\quad \forall i\in N_3,$$

所以

$$P_{ir}(A)-l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}$$

$$=R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\varphi l_i^{N_3}(A)+\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}-\varphi l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}$$

$$>R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+\varphi l_i^{N_3}(A)+\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)-P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}>0$$

又由 w_i，δ 的定义可知 $w_i\le\delta<1$.所以对于 $\forall i\in N_3$，有

$$\frac{\delta R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)w_t}{P_{ir}(A)-\varphi l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}}\le\frac{R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)}{P_{ir}(A)-\varphi l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}}$$

$$-\frac{P_{ir}(A)-\varphi l_i^{N_3}(A)-\gamma\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}}{P_{ir}(A)-\varphi l_i^{N_3}(A)-\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}}<1$$

由 h 的定义可知，对 $\forall i\in N_3$，有 $0\le h<1$，并且

$$hP_{ir}(A)\ge l_i^{N_1}(A)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(A)+h\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}\tag{2.16}$$

对 $\forall i\in N_2$，由式（2.5）可令

$$\mu_i \triangleq \frac{1}{\sum\limits_{t\in N_3,t>i}|a_{ii}|}\left[\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|-\zeta l_i^{N_2}(A)-\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(A)+h\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}\right] \tag{2.17}$$

当 $\sum\limits_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|=0$，记 $\mu_i=+\infty$，由式（2.7）可知 $\mu_i>0\ (\forall i\in N_2)$，又因为 $0<h\dfrac{P_{ir}(A)}{|a_{tt}|}<1\ (\forall i\in N_3)$，从而必定存在充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $0<\varepsilon<\min\limits_{i\in N_2}\mu_i\le+\infty$，并且 $\max\limits_{t\in N_2}\left(h\dfrac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)<1$。

构造对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2,...,x_n)$，其中

$$x_i=\begin{cases}1,i\in N_1,\\ w_i,i\in N_2,\\ h\dfrac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon,i\in N_3.\end{cases}$$

显然对 $\forall i\in N$，都有 $0\le x_i<1$，所以 X 为正对角矩阵。令 $B=AX=(b_{ij})$，由引理 1.1 知 $l_i(B)\le l_i(A)$，$\forall i\in N$。下面我们证明 $B\in N$。

1）对 $\forall i\in N_1$，存在 $t\in N_2\cup N_3$，使得 $|a_{it}|\ne 0$，且对 $\forall t\in N_3$，$0<h\dfrac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon<1$，从而

$$R_i(B)=l_i^{N_1}(B)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$<R_i^{N_1}(A)+R_i^{N_2}(A)+R_i^{N_3}(A)$$

$$=R_i(A)=|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

2）对于 $\forall i\in N_2$，由式（2.7）得出

$$R_i(B)=l_i^{N_1}(B)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$\le l_i^{N_1}(A)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|$$

$$<l_i^{N_1}(A)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\mu_i\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|$$

$$<|a_{ii}|w_i=|b_{ii}|$$

3）对于 $\forall i\in N_3$，由式（2.6）得出

$$R_i(B)=l_i^{N_1}(B)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|\left(h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)$$

$$<l_i^{N_1}(A)+\delta\sum_{t\in N_1,t>i}|a_{it}|+\zeta_i^{N_2}(B)+\sum_{t\in N_2,t>i}|a_{it}|w_t+\varphi l_i^{N_3}(B)+\sum_{t\in N_3,t>i}|a_{it}|h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}$$

$$\le\varepsilon R_i^{N_3}(A)+hP_{tr}(A)$$

$$<\varepsilon|a_{ii}|+hP_{tr}(A)=\left(h\frac{P_{tr}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon\right)|a_{ii}|=|b_{ii}|$$

根据以上的证明，对于 $\forall i\in N$，都有 $|b_{ii}|>R_i(B)$，所以 $B\in N$，由此可知 $A\in N^*$，即 A 为广义 Nekrasov 矩阵。

数值算例

例 3.1 设矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}3&1&3&3\\0.6&6&3.5&4\\1&0.5&15&3\\1.5&4&2.4&20\end{bmatrix}$$

由计算我们得出 $N_1=\{0\}$， $N_2=\{3,4\}$， $N_3=\{1,2\}$。因为

$$w_{22}|a_{22}|=3.5838>3.77785=\delta\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+l_2(A)+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|w_t+h\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}$$

因此不满足文献[14]的判定条件。

但是当 $i=1$ 时，我们有 $|a_{12}|=1\ne0$，$|a_{13}|=3\ne0$，$|a_{14}|=3\ne0$，并且对于 $i=2\in N_3$ 时，我们可以得到

$$w_{22}|a_{22}|=3.5838>3.3219=\delta\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+l_2^{N_1}(A)+\zeta l_2^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|w_t+h\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}$$

所以矩阵 A_1 满足定理 2.2 的判定条件，A_1 为广义 Nekrasov 矩阵。但是由于

$$\frac{R_2(A)}{R_2(A)-|a_{22}|}\left[\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+l_2^{N_1}(A)+\delta l_2^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}\right.$$

$$\left.+\eta l_2^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right]=-28.0255<2=|a_{22}|$$

无法满足定理 2.1 的条件，该矩阵不能用该定理 2.1 作为判定依据。

例 3.2 设矩阵

$$A_2=\begin{bmatrix}2&1&0&0&1\\4&4&0&6&1\\1&0&4&2&1\\1&0&0&15&2\\0&0&1&0&8\end{bmatrix}$$

通过直接计算得到 $N_1=\{1,3\}$， $N_2=\{2\}$， $N_3=\{4,5\}$， 由于

$$|a_{22}|=4<\frac{R_2(A)}{R_2(A)-|a_{22}|}\left[l_2(A)+\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}+\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right]=7.1318$$

因此不满足文献[14]的判定条件。

但是对于 $\forall i\in N_1$，当 $i=1$ 时，$|a_{11}|=2$，$l_1(A)+\sum_{t\in N_1,t>1}|a_{1t}|=0$；当 $i=3$ 时，$|a_{33}|=4$

$l_3(A)+\sum_{t\in N_1,t>3}|a_{1t}|=1$.所以对 $\forall i\in N_1$，都有 $|a_{ii}|\neq l_i(A)+\sum_{t\in N_1,t>1}|a_{it}|$.且对 $i=2\in N_2$ 时，我们有

$$|a_{22}|=4>\frac{R_2(A)}{R_2(A)-|a_{22}|}\left[\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+l_i^{N_1}(A)+\delta l_i^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|\frac{R_t(A)-|a_{tt}|}{R_t(A)}\right.$$

$$\left.+\eta l_2^{N_3}(A)+\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right]=0.5578$$

所以 A_2 可以用本文定理 2.1 进行判定。且 A_2 是广义 Nekrasov 矩阵。

$$w_{22}|a_{22}|=6.2857>2.4666=\delta\sum_{t\in N_1,t>2}|a_{2t}|+l_2^{N_1}(A)+\zeta l_2^{N_2}(A)+\sum_{t\in N_2,t>2}|a_{2t}|w_t+h\sum_{t\in N_3,t>2}|a_{2t}|\frac{P_{tr}(A)}{|a_{tt}|}.$$

满足定理 2.2 的判定条件，可以用该定理判定，且 A_2 是一个广义 Nekrasov 矩阵。

参考文献

[1] Li W.On Nekrasov matrices[J].Linear Algebra Appl,1998,28(1): 87-96.

[2] Pang MX,Zhu XL.Generalized Nekrasov matrices and applications[J].Journal of Computation Mathematics, 2003, 21(2): 183-188.

[3] Wang Q,Song YZ,Li WC.Estimates of upper bounds of the spectral radius for some iteration matrices[J].Journal of Nanjing university mathematical biquarteraly, 2005, 2(2): 96-106.

[4] Kolotilina LY.Bounds or the determinants of Nekrasov and S-Nekrasov matrices[J].Journal of Mathematical Sciences, 2015, 207(5): 776-785.

[5] Esnaola MJ,Pena JM.Error bounds for linear complementarity problems of Nekrasov matrices[J].Numerical Algorithms, 2014, 6(7): 655-667.

[6] Liu JZ,Zhang J,Zhou LX and Tu G.The Nekrasov diagonally dominant degree on the Schur complement of Nekrasov matrices and its applications[J].Applied Mathematics and Computation, 2018, 320: 251-263.

[7] 黎稳，黄廷祝.关于非奇异性判别的 Gudkov 定理[J].工程数学学报,2009(4):697-702.

[8] 郭爱丽,刘建州.广义 Nekrasov 矩阵的判定[J].工程数学学报,2009(4):697-702.

[9] 王银燕,徐仲,陆全.广义 Nekrasov 矩阵的迭代判定准则[J].高等学校计算数学学报,2015,37(1):19-30.

[10] 郭爱丽,刘建州.广义 Nekrasov 矩阵的新判据[J].数学实践与认识,2016,46(5):239-245.

[11] 郭爱丽,左建军.广义 Nekrasov 矩阵的判别法及其迭代算法[J].高校应用数学学报,2020,35(3):356-366.

[12] 吕振华,孙旭,田万福等.广义 Nekrasov 矩阵的一组改进的判别条件.数值计算与计算机应用,2022,43(3):307-313.

[13] 郭爱丽,左建军.广义 Nekrasov 矩阵判定的新条件[J].高等学校计算数学学报,2022, 44(2):136-146.