不定积分 $\int \sec^m x\tan^n x\mathrm{d}x(m,n\in N)$ 的求解

张 银，李 唯

吉利学院智能科技学院　四川成都

【摘要】由于 m，n 的奇偶性不同，$\int \sec^m x\tan^n x\mathrm{d}x(m,n\in N)$ 求解方法也不相同，本文利用基本公式法，换元积分法，分部积分法，以及递推公式法讨论了此积分。

【关键词】不定积分；换元积分法；分部积分法；递推公式法

【收稿日期】2023 年 2 月 21 日　【出刊日期】2023 年 3 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20230004

The solution of the indefinite integrals $\int \sec^m x\tan^n x\mathrm{d}x(m,n\in N)$

Yin Zhang, Wei Li

Geely College of Intelligent Technology Chengdu

【Abstract】 Because the parity of m and n is different, the solution method is also different. In this paper, the basic formula method, element replacement integral method, division integral method, and recursive formula method are discussed. Key words: indefinite integral; element replacement integral method; partial integral method and recursive formula method.

【Keywords】 indefinite integral; element replacement integral method; partial integral method and recursive formula method

不定积分是数学分析和高等数学的主要内容之一，不定积分为牛顿—莱布尼茨公式计算定积分提供了基础，因此，求解不定积分也是非常必要的。为了更好的解决一些积分问题，本文将探讨：（1）m 为偶数，n 为偶数时；（2）m 为奇数，n 为奇数；（3）m 为偶数，n 为奇数；（4）m 为奇数，n 为偶数，四种情况下的不定积分，$\int \sec^m x\tan^n x\mathrm{d}x(m,n\in N)$ 的计算。

1 **当 m 为偶数，n 为偶数时**

（1）m=2，n=0

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C;$$

（2）m=0，n=2

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C;$$

（3）m=2，n=2

$$\int \sec^2 x\tan^2 x\mathrm{d}x=\int \tan^2 x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{3}\tan^3 x+C;$$

（4）m=0，n=2l （ l≥1，l∈N）

$$\int \tan^{2l} x\mathrm{d}x=\int \tan^{2l-2} x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\frac{\tan^{2l-1} x}{2l-1}-\int \tan^{2l-2} x\mathrm{d}x+C$$

（5）m=2k，n=0 （ k ≥ 1，k∈N）

$$\begin{aligned}&\int \sec^{2k} x\mathrm{d}x\\&=\int \sec^{2k-2} x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int(1+\tan^2 x)^{k-1}\sec^2 x\cdot\mathrm{d}x\\&=\int(1+\tan^2 x)^{k-1}\cdot\mathrm{d}\tan x\\&\overset{令u=\tan x}{=}\int(1+u^2)^{k-1}\cdot\mathrm{d}u\\&=\int(C_{k-1}^0u^{2k-2}+C_{k-1}^1u^{2k-4}+\cdots+C_{k-1}^{k-1})\cdot\mathrm{d}u\\&=C_{k-1}^0\frac{1}{2k-1}u^{2k-1}+C_{k-1}^1\frac{1}{2k-3}u^{2k-3}+\cdots+u+C\\&=C_{k-1}^0\frac{1}{2k-1}\tan^{2k-1}x+C_{k-1}^1\frac{1}{2k-3}\tan^{2k-3}x+\cdots+\tan x+C.\end{aligned}$$

（6）m ≥4，n ≥2，取 m = 2k + 2，n=2l （ k ≥1，l ≥ 1，k，l∈N）

$$\begin{aligned}\int \sec^{2k+2} x\tan^{2l} x\mathrm{d}x&=\int \sec^{2k} x\tan^{2l} x\mathrm{d}\tan x\\&=\int(1+\tan^2 x)^k\tan^{2l} x\mathrm{d}\tan x\\&\overset{令u=\tan x}{=}\int(1+u^2)^k u^{2l}\mathrm{d}u\\&=\int(C_k^0+C_k^1u^2+C_k^2u^4+\cdots+C_k^ku^{2k})u^{2l}\mathrm{d}u\\&=\int(C_k^0u^{2l}+C_k^1u^{2+2l}+C_k^2u^{4+2l}+\cdots+C_k^ku^{2k+2l})\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2l+1}u^{2l+1}+C_k^1\frac{1}{2l+3}u^{2l+3}+\cdots+C_k^k\frac{1}{2l+2k}u^{2k+2l}+C\end{aligned}$$

2 当 m 为奇数，n 为奇数时

（1）m=1，n=1

$$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$$

（2）m=3，n=1

$$\int \sec^3 x\tan x\mathrm{d}x=\int \sec^2 x\mathrm{d}\sec x=\frac{1}{3}\sec^3 x+C$$

（3）m=1，n=3

$$\int \sec x\tan^3 x\mathrm{d}x=\int \tan^2 x\mathrm{d}\sec x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}\sec x=\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$$

（4）m ≥3，n ≥3，取 m = 2k + 1，n=2l+1 （ k ≥1，l ≥ 1，k，l∈N）

$$\begin{aligned}
&\int \sec^{2k+1} x\tan^{2l+1} x\mathrm{d}x\\
&=\int \sec^{2k} x\tan^{2l} x\mathrm{d}\sec x\\
&=\int \sec^{2k} x(\sec^2 x-1)^l \mathrm{d}\sec x\\
&\overset{令u=\sec x}{=}\int u^{2k}(u^2-1)^l\mathrm{d}u\\
&=\int u^{2k}(C_l^0 u^{2l}+C_l^1(-1)^1 u^{2l-2}+C_l^2(-1)^2 u^{2l-4}+\cdots+C_l^l(-1)^l)\mathrm{d}u\\
&=\int (u^{2l+2k}+C_l^1(-1)^1 u^{2k+2l-2}+C_l^2(-1)^2 u^{2k+2l-4}+\cdots+C_l^l(-1)^l u^{2k})\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2l+2k+1}u^{2l+2k+1}+\frac{1}{2l+2k-1}C_l^1(-1)^1 u^{2k+2l-1}+\cdots+\frac{1}{2k+1}C_l^l(-1)^l u^{2k}+C
\end{aligned}$$

3 当 m 为偶数，n 为奇数时

（1）m=0，n=1

$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C;$$

（2）m=2，n ≥3 （n∈N）

$$\int \sec^2 x\tan^n x\mathrm{d}x=\int \tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x+C$$

（3）m=0，n=2l+1 （ l≥1，l∈N）

$$\begin{aligned}
&\int \tan^{2l+1} x\mathrm{d}x\\
&=\int \tan^{2l-1} x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\
&=\int \tan^{2l-1} x\mathrm{d}\tan x-\int \tan^{2l-1} x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2l-1}\tan^{2l-1} x-\int \tan^{2l-1} x\mathrm{d}x+C
\end{aligned}$$

（4）m ≥4，n ≥3，取 m = 2k + 2，n=2l+1 （ k ≥1，l≥ 1，k，l∈N）

$$\begin{aligned}
&\int \sec^{2k+2} x\tan^{2l+1} x\mathrm{d}x\\
&=\int \sec^{2k} x\tan^{2l+1} x\mathrm{d}\tan x\\
&=\int (1+\tan^2 x)^k\tan^{2l+1} x\mathrm{d}\tan x\\
&\overset{令u=\tan x}{=}\int (1+u^2)^k u^{2l+1}\mathrm{d}u\\
&=\int (C_k^0+C_k^1u^2+C_k^2u^4+\cdots+C_k^k u^{2k})u^{2l+1}\mathrm{d}u\\
&=\int (C_k^0u^{2l+1}+C_k^1u^{3+2l}+C_k^2u^{5+2l}+\cdots+C_k^k u^{2k+2l+1})\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2(l+1)}u^{2(l+1)}+C_k^1\frac{1}{2(l+2)}u^{2(l+2)}+\cdots+C_k^k\frac{1}{2(l+k+1)}u^{2k+2l+2}+C
\end{aligned}$$

4 当 m 为奇数，n 为偶数时

（1）m=1，n=0

$$\int \sec x\mathrm{d}x=\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\ln|\sec x+\tan x|+C;$$

（2）m=1，n=2

$$\begin{aligned}&\int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x\\ &=\int (\sec^3 x-\sec x)\mathrm{d}x\\ &=\int \sec x\mathrm{d}\tan x-\ln|\sec x+\tan x|\\ &=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x-\ln|\sec x+\tan x|\end{aligned}$$

解方程可得

$$\int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\tan x\sec x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$$

（3）m=2k+1（ k ≥1，k∈N），n=0

$$\begin{aligned}&\int \sec^{2k+1} x\mathrm{d}x\\ &=\int \sec^{2k-1} x\mathrm{d}\tan x\\ &=\tan x\sec^{2k-1} x-\int \tan x\mathrm{d}\sec^{2k-1} x\\ &=\tan x\sec^{2k-1} x-(2k-1)\int \tan^2 x\sec^{2k-1}x\mathrm{d}x\\ &=\tan x\sec^{2k-1} x-(2k-1)\int (\sec^2 x-1)\sec^{2k-1}x\mathrm{d}x\\ &=\tan x\sec^{2k-1} x-(2k-1)[\int \sec^{2k+1}x\mathrm{d}x-\int \sec^{2k-1}x\mathrm{d}x]\end{aligned}$$

解方程可得

$$\int \sec^{2k+1} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2k}\tan x\sec^{2k-1} x+\frac{2k-1}{2k}\int \sec^{2k-1}x\mathrm{d}x$$

则

$$\int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\tan x\sec x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$$

（4）m=2k+1（ k ≥1，k∈N），n=2

$$\begin{aligned}&\int \sec^{2k+1} x\tan^2 x\mathrm{d}x\\ &=\int \sec^{2k-1} x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\ &=\int \sec^{2k+1} x\mathrm{d}x-\int \sec^{2k-1} x\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2k}\tan x\sec^{2k-1} x-\frac{1}{2k}\int \sec^{2k-1}x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

（5）m ≥5，n ≥2，取 m = 2k + 1，n=2l （ k ≥2，l ≥ 1，k，l∈N）

$$\begin{aligned}
&\int \sec^{2k+3}x\tan^{2l}x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2l+1}\int \sec^{2k+1}x\sec^2 x(2l+1)\tan^{2l}x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2l+1}\int \sec^{2k+1}x\mathrm{d}\tan^{2l+1}x\\
&=\frac{1}{2l+1}(\sec^{2k+1}x\cdot\tan^{2l+1}x-\int \tan^{2l+1}x\mathrm{d}\sec^{2k+1}x)\\
&=\frac{1}{2l+1}[\sec^{2k-1}x\cdot\tan^{2l+1}x-(2k+1)\int \tan^{2l+1}x\sec^{2k-1}x\sec x\tan x\mathrm{d}x]\\
&=\frac{1}{2l+1}[\sec^{2k-1}x\cdot\tan^{2l+1}x-(2k+1)\int \tan^{2l+2}x\sec^{2k}x\mathrm{d}x]\\
&=\frac{1}{2l+1}[\sec^{2k-1}x\cdot\tan^{2l+1}x-(2k+1)\int \tan^{2l+2}x\sec^{2k-2}x\mathrm{d}\tan x]\\
&=\frac{1}{2l+1}[\sec^{2k-1}x\cdot\tan^{2l+1}x-(2k+1)\int \tan^{2l+2}x(1+\tan^2 x)^{k-1}\mathrm{d}\tan x]
\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}
&\int \tan^{2l+2}x(1+\tan^2 x)^{k-1}\mathrm{d}\tan x]\\
&\overset{令u=\tan x}{=}\int u^{2l+2}(1+u^2)^{k-1}\mathrm{d}u\\
&=\int u^{2l+2}(C_{k-1}^0+C_{k-1}^1u^2+C_{k-1}^2u^4+\cdots+C_{k-1}^{k-1}u^{2k-2})\mathrm{d}u\\
&=\int (C_{k-1}^0u^{2l+2}+C_{k-1}^1u^{2l+4}+C_{k-1}^2u^{2l+6}+\cdots+C_{k-1}^{k-1}u^{2k+2l})\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2l+3}u^{2l+3}+C_{k-1}^1\frac{1}{2l+5}u^{2l+5}+\cdots+C_{k-1}^{k-1}\frac{1}{2l+2k+1}u^{2k+2l+1}+C
\end{aligned}$$

可得

$$\int \sec^{2k+3}x\tan^{2l}x\mathrm{d}x=\frac{\sec^{2k-1}x\cdot\tan^{2l+1}x}{2l+1}-\frac{2k+1}{2l+1}[\frac{u^{2l+3}}{2l+3}+C_{k-1}^1\frac{u^{2l+5}}{2l+5}+\cdots+C_{k-1}^{k-1}\frac{u^{2k+2l+1}}{2l+2k+1}+C]$$

参考文献

[1] 同济大学数学系.高等数学第七版,上册[M].高等教育出版社, 2014.07.

[2] 华东师范大学数学系.数学分析第四版,上册[M].高等教育出版社, 2010.07.

[3] 陈纪修，於崇华.数学分析第二版,上册[M].高等教育出版社,2004.05.

[4] 许冠阳.对形如不定积分∫cscxdx 解法的探讨[J].数学学习与研究,2019(08):131.

[5] 丁伯伦,凌婷婷,荣婉君,朱晓明.不定积分∫secxdx 的 8 种计算方法[J].长春工业大学学报,2018,39(03):309-312.