巧用模型解中考数学题例析

杨心雨

扬州大学　江苏扬州

【摘要】数学模型是学生解题思维的起点，培养学生的模型思想有助于拓宽思维，提高分析、解决问题的能力。熟悉并掌握模型的应用，能够帮助学生直击问题的关键，跨越解题障碍，缩短解题时间。通过几个典型数学模型及例题解析，帮助学生理解并应用模型，渗透思想，发展数学核心素养。

【关键词】数学模型；一线三等角；将军饮马；胡不归

【收稿日期】2023 年 7 月 21 日　【出刊日期】2023 年 9 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20230017

Clever use of models to solve math problems in the middle school exam

Xinyu Yang

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Mathematical model is the starting point of students' problem-solving thinking, and cultivating students' model thinking is helpful to broaden their thinking and improve their ability to analyze and solve problems. Familiar with and master the application of the model, which can help students directly grasp the key of the problem, overcome the obstacles of problem solving, and shorten the problem solving time. Through the analysis of several typical mathematical models and example problems, help students understand and apply models, penetrate ideas, and develop core mathematical literacy.

【Keywords】 Mathematical model; A line of three equal angles; General Feeding water to his horses; Why not return

《义务教育数学课程标准（2022 版）》（以下简称新课标）在《义务教育数学课程标准（2011 版）》（以下简称旧课标）的基础上，确立了以核心素养为导向的课程目标，将旧课标中“双基”发展为“四基”（基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验），进一步强调发展学生运用数学知识与方法发现、提出、分析、解决问题的能力（简称“四能”），并以“三会”统领核心素养[1]。模型思想是指根据问题的本质属性抽象出数学模型，运用数学模型快速解决问题的思想。初中数学教学中应做好数学模型的归纳，引导学生把握模型的本质，以不变应万变。本文从三个典型数学模型出发，帮助学生理解并应用模型，助推核心素养发展。

1 “一线三等角”

“一线三等角”指有三个等角的顶点在同一直线上构成相似或全等图形，这个角可以是直角，也可以是锐角或钝角[2]，但究其根本，图形都构成了一个“K”字。有些试题中，模型比较直观，学生能够发现并运用模型；有些试题中，则是将模型隐藏在图形中，需要学生抽象出“K”，利用辅助线，构造模型。以两道例题，引导学生感悟“K”在何处，怎么用。

例 1（高邮市 2023 年中考一模）如图 1，在矩形 ABCD 中，点 M 是 BC 边上的一个动点（点 M 与点 C 不重合），连接 AM，过点 M 作 $\mathrm{MN}\perp\mathrm{AM}$，垂足为点 M，MN 交 CD 或 CD 的延长线于点 N。

（1）若 $\mathrm{AB}=6,\ \mathrm{BC}=8$。

作者简介：杨心雨（2000-）女，硕士，主要从事数学教育研究。

①当 $BM=6$ 时，$CN=$____________；

②已知点 E 是 BC 边的中点，当点 M 在 BC 边上运动时，MN 能不能经过点 E？若能，求出 BM 的长度；若不能，说明理由；

③若点 F 在 BC 边上，且 $CF=1$，当点 M 从点 B 开始运动到点 F 停止时，点 N 运动的路径为____________；

（2）若 $AB=6,\ BC=b$。当点 M 在 BC 边上运动时，求使得下列两个条件都成立的 b 的取值范围；点 N 始终在 CD 边上；点 M 在某一位置时，点 N 恰好与点 D 重合。

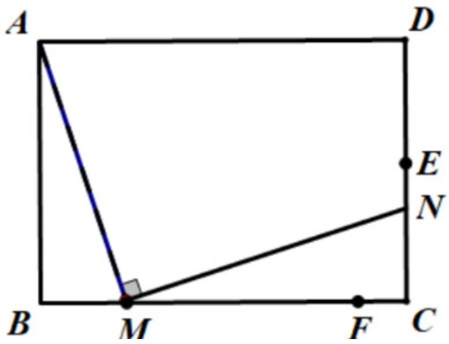

图 1

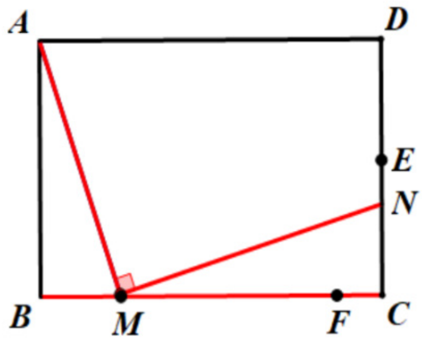

图 2

分析：显然能够从图中抽象出“K”，如图 2。由此利用 $\Delta ABM\sim\Delta MCN$ 求解。①可直接利用等腰直角三角形求出 $CN=2$，在此不过多赘述，主要关注以下三问。

解 ②$\because ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle B=\angle C=90^\circ$.

又 $\because MN\perp AM$,

$\therefore \angle BAM+\angle AMB=\angle NMC+\angle CNM=\angle AMB+\angle NMC$,

$\therefore \angle BAM=\angle NMC, \angle AMB=\angle CNM$,

$\therefore \Delta ABM\sim\Delta MCN$,

$\therefore \dfrac{AB}{MC}=\dfrac{BM}{CN}$.

不妨设 $BM=x$, 则 $CM=8-x$. 若 MN 经过点 E，且 E 是 BC 边的中点，则 $CN=CE=3$，则有 $\dfrac{6}{8-x}=\dfrac{x}{3}$,

整理得 $x^2-8x+18=0,\ \Delta<0$,

所以 MN 不能经过点 E。

③点 M 从点 B 开始运动到点 F 停止，始终满足 $\Delta ABM\sim\Delta MCN$, 则 $\dfrac{AB}{MC}=\dfrac{BM}{CN}$.

同样设 $BM=x$, 则 $CM=8-x$，$CN=-\dfrac{1}{6}(x-4)^2+\dfrac{8}{3}$.

当 M 在点 B 时，N 在点 C 处，当 M 在点 F 时，N 在 CD 边上。在此运动过程中，CN 存在最大值，当 $x=4, CN_{\max}=\dfrac{8}{3}$.

当 M 运动到点 F 时，$x=7, CN=\dfrac{7}{6}$.

$\therefore N$ 最开始在点 C 处，逐渐远离点 C ，最大在距点 C $\frac{8}{3}$ 处，最后到达距 C $\frac{7}{6}$ 处，点 N 运动的路径为 $\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{7}{6}=\frac{25}{6}.$

（2）点 N 始终在 CD 边上，始终满足 $\Delta ABM\sim\Delta MCN,$ 则 $\frac{AB}{MC}=\frac{BM}{CN},CN\le CD.$ 同样设 $BM=x,$ 则

$CM=8-x$，$CN=-\frac{1}{6}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{24}.$

则 $CN\le\frac{b^2}{24}\le 6,$ 即 $b^2\le 144.$

且点 M 在某一位置时，点 N 恰好与点 D 重合，此时 ΔABM、 ΔCDM、 ΔMDA 均为直角三角形，由此有

$Rt\Delta ABM,AB^2+BM^2=AM^2,i.e,6^2+x^2=AM^2,$

$Rt\Delta CDM,CD^2+MC^2=MN^2,i.e,6^2+(b-x)^2=MN^2,$

$Rt\Delta MDA,MA^2+MN^2=AN^2,i.e,6^2+x^2+6^2+(b-x)^2=b^2,$

整理得 $x^2-bx+36=0,$

利用 $\Delta\ge 0,$ 求出 $b^2\ge 144.$

所以 $b^2=144,$ 又 $b>0,$ 所以 $b=12.$

评注：我们将以 90° 为等角的“一线三等角”模型称为“一线三直角”模型，这是考试中出现次数最多的，也是学生最能直观感受到题目中存在“一线三等角”模型的，是“一线三直角”模型应用的第一个境界——“有“‘K’型，直接用”[3]。但此类题目通常是以此作为背景，设置动态几何类问题，此时题目就较有难度了。

例 2（武汉市 2023 年新动力预测卷） 如图 3，在 Rt∆ABC 中， $AB=AC=4,$ 点 E、F 分别在边 AB,AC 上，D 是 BC 中点，且 $\angle EDF=45^\circ,$ 连接 $EF,$ 设 $EF=x,$ $S_{\Delta DEF}=y,$ 则 y 与 x 之间的函数关系式是________。

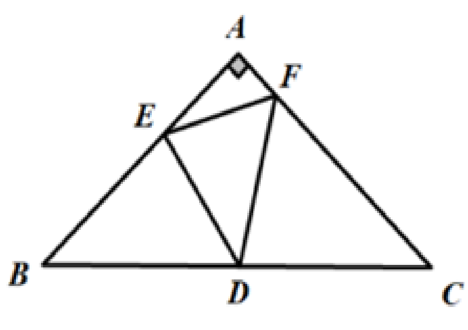

图 3

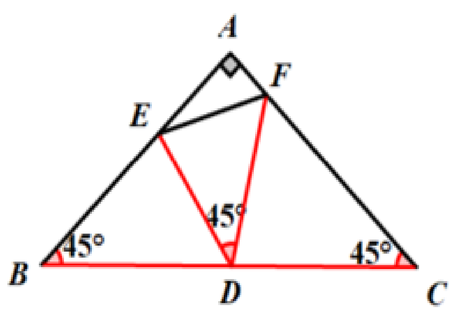

图 4

分析：此题中等角为 $45^\circ,$ 相较于前一题 $90^\circ,$ 学生难以立刻抽象出“K”，但仔细观察图形，学生能够在图中标注出角度为 45° 的三个角，从而意识到“一线”指直线 BC ，刻画出“K”型，如图 4 所示。

解$\because \angle B=\angle C=45^{\circ},\angle EDF=45^{\circ}$,

$\therefore \angle BED+\angle EDB=\angle EDB+\angle FDC=135^{\circ}$,

$\therefore \angle BED=\angle FDC.$

$\because \angle B=\angle C$,

$\therefore \Delta DEB\sim\Delta FDC$（两角相等），

$\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{BE}{DC}.$

又$\because D$是BC中点，

$\therefore BD=DC$,

$\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{BE}{BD}$,

$\because \angle B=\angle EDF=45^{\circ}$,

$\therefore \Delta DEB\sim\Delta FED$（两边成比例且夹角相等），

$\therefore \dfrac{DE}{EF}=\dfrac{BE}{DE},i.e,DE^2=BE\bullet EF.$

根据相似三角形面积比等于相似比的平方，得$\dfrac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta BED}}=\left(\dfrac{EF}{DE}\right)^2=\dfrac{EF^2}{DE^2}=\dfrac{EF^2}{BE\bullet EF}=\dfrac{x}{BE}$。

过点D向BE作垂线，显然该垂线与AC平行，且D是BC中点，所以$h=\dfrac{1}{2}AC=2$。

$\because S_{\vartriangle BED}=\dfrac{1}{2}\times BE\times h=BE$,

$\therefore S_{\vartriangle DEF}=x,i.e,y=x.$

评注："K"型只是该题的基础，利用"K"型找到$\Delta DEB\sim\Delta FDC$，但这与题中所给的$\vartriangle DEF$无关，学生进一步分析，思考如何将这三个三角形联系起来，从而意识到可以借助已知的三角形相似获得成比例线段，再次使用等角，获得新的相似，最终得到$\Delta DEB\sim\Delta FDC\sim\Delta FED$，建立起三个三角形的相似关系。该题综合应用“一线三等角”与相似的判定与性质，对学生的数学抽象素养要求较高，题目的难点有两处，一是学生难以直接抽象出"K"，二是抽象出"K"后，获得的相似不是题目所需要的，学生需要进一步思考如何建立起已知的三角形相似与题目所给的三角形之间的关系。

2 “将军饮马”

"将军饮马"问题是中考的热点之一，也是"胡不归"、"阿氏圆"模型的基础。常用于求折线段的最小值问题，通常做法是利用对称、平移、旋转、翻折等将同侧线段和问题转化为异侧两点之间线段最短或垂线段最短问题[4]。以泰州市 2022 年中考模拟的两道题目为例，借助对称转化线段，渗透"化折为直"思想，为"胡不归与阿氏圆"模型例题铺垫。其中例 4 既可直接利用"将军饮马"模型在该部分解决，也可先将其视为典型的"胡不归"模型，再转化为"将军饮马"，该思路将在第三部分"胡不归与阿氏圆"中阐述。

例 3（泰州市 2022 年中考模拟）如图 5，已知在锐角三角形ABC中，$\angle B=45^{\circ}$，$AC=5$，ΔABC的面积为 15，D, E, F 分别为边 AB, BC, AC 上的动点，则ΔDEF周长的最小值为________________。

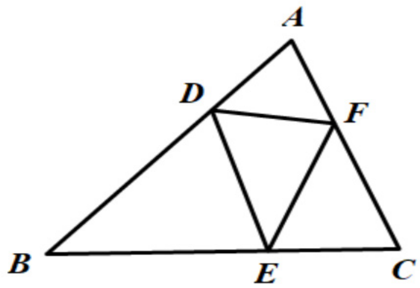

图 5

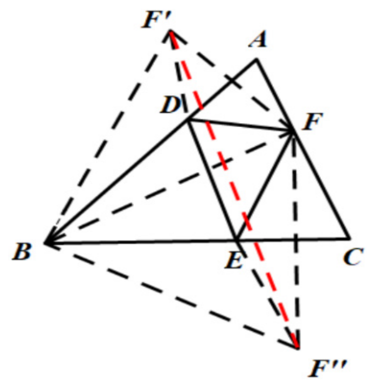

图 6

分析：求ΔDEF周长的最小值，即求$DE+DF+EF$的最小值，对于线段和的最小值和差的最大值，学生能够想到“将军饮马”模型，由此需要将不共端点的线段转化为共端点的线段。

解 如图 6，作点F关于AB、BC的对称点F'、F''，连接BF、BF'、BF''，

$\therefore DF=DF', EF=EF'', \angle ABF'=\angle ABF, \angle FBC=\angle F''BC,$

$\therefore DE+DF+EF=DE+DF'+EF'',$

$\therefore$当F'、D、E、F''四点共线时，ΔDEF周长为$F'F''$。

$\because \angle B=45^\circ, \therefore \angle F'BF''=90^\circ,$ 且 $F'B=FB=F''B,$

$\therefore \Delta BF'F''$为等腰直角三角形，

$\therefore F'F''=\sqrt{2}BF,$

$\therefore BF$最小时，ΔDEF周长最小。

当$BF\perp AC$时，BF最小。

$\because S_{\Delta ABC}=15=\dfrac{1}{2}\times AC\times BF=\dfrac{1}{2}\times 5\times BF,$

$\therefore BF=6, F'F''=6\sqrt{2}, C_{\Delta DEF}=6\sqrt{2}.$

评注：本题背景较简单，是“将军饮马”模型的直接运用。 要求ΔDEF周长的最小值，学生能自然而然的想到将周长表示为线段的和，从而利用对称寻找线段和的最小值。

例 4（泰州市 2022 年中考模拟）如图 7，已知在$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABC}$中，$\angle\mathrm{C}=90^\circ$。$\mathrm{AC}=6$, $\mathrm{AB}=9$.E 是AB上的点，$\mathrm{BE}=5$. D 是线段BC上的一个动点，沿AD折叠$\Delta\mathrm{ACD}$，点C与点C'重合。连接$\mathrm{BC'}$,$\mathrm{EC'}$.

（1）求证：$\Delta\mathrm{AEC'}\sim\Delta\mathrm{AC'B}$。

（2）已知F是BC上的一点，且$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$。

①若$\Delta\mathrm{BC'F}$与$\Delta\mathrm{BC'E}$的面积之比是$\sqrt{5}:5$，请用无刻度的直尺和圆规在图 8 中作出折叠后的$\Delta\mathrm{AC'D}$ （保留作图痕迹，不写作法）；

②求$\mathrm{BC'}+\dfrac{3}{2}\mathrm{FC'}$的最小值。

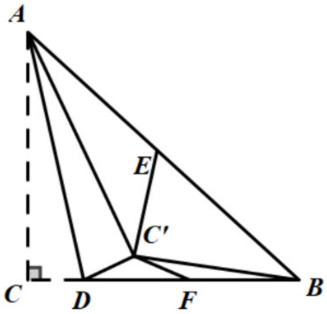

图 7

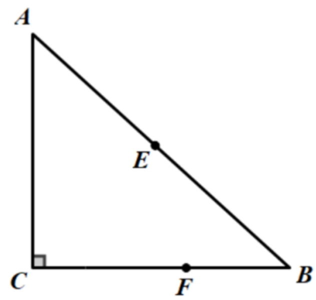

图 8

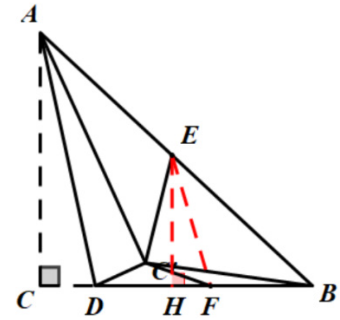

图 9

评注：本题主要关注求 $\mathrm{BC'}+\frac{3}{2}\mathrm{FC'}$ 的最小值，首先可利用相似，将 BC' 转化为 $\frac{3}{2}C'E$，从而转化为求 $\frac{3}{2}(C'E+C'F)$ 的最小值，连接 EF，当 E、C'、F 三点共线时，$\mathrm{BC'}+\frac{3}{2}\mathrm{FC'}$ 值最小，为 $\frac{3}{2}EF$，如图 9，利用勾股定理即可求出 EF。

3 "胡不归与阿氏圆"

"胡不归与阿氏圆"均是求带系数的折线最值问题，代数式均表征为 $kAP+BP$ 形式，不同的是"胡不归"模型中动点在直线上，而"阿氏圆"模型中动点在圆上，而当 $k=1$ 时，代数式转化为常见的"将军饮马"模型[5]，因此二者的通用做法均是采用"将军饮马"模型中的"化折为直"思想，将折线转化为线段，再利用两点之间线段最短或垂线段最短求解。因此我们以"胡不归"模型为例渗透转化思想。

"胡不归"基础模型如下图 10 所示，其中点 A 为直线 l 上一定点，点 B 为直线 l 外一定点，点 P 在直线 l 上运动，求 $kAP+BP\left(0<k<1\right)$ 的最小值：

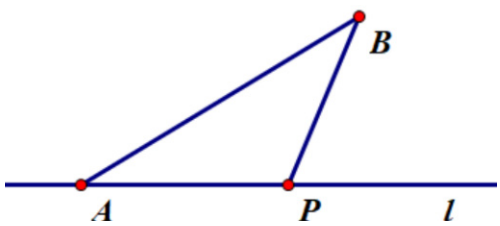

图 10

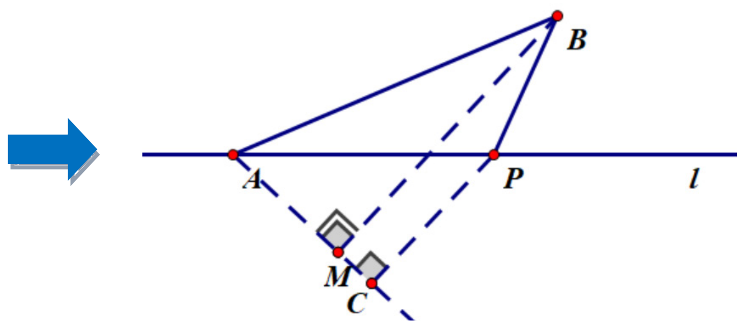

图 11

具体解题步骤如下：

一找：寻找带有系数 k 的线段 kAP；

二构：在点 B 异侧，构造以 AP 为斜边的 $Rt\Delta APC$，使得 $\sin\angle PAC=k$；

三化：将折线 kAP 转化成线段 PC；

四解：$kAP+BP=PC+PB$，利用垂线段最短求解。

注：当系数 $k>1$ 时，考虑提取 k 转化为 $k\left(AP+\frac{1}{k}BP\right)$。

例 5（淮安市 2022 年中考）如图 12，二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交

于点C，点B的坐标为$(3,0)$，点C的坐标为$(0,3)$，直线l经过B,C两点。

（1）求该二次函数的表达式及其图像的顶点坐标；

（2）P为直线l上的一点，过点P作x轴的垂线与该二次函数的图像相交于点M，再过点M作y轴的垂线与该二次函数的图像相交于另一点N，当$PM=\dfrac{1}{2}MN$时，求点P的横坐标；

（3）如图13，点C关于x轴的对称点为D，P为线段BC上的一个动点，连接AP，Q为线段AP上一点，且$AQ=3PQ$，连接DQ，当$3AP+4DQ$的值最小时，请直接写出DQ的长。

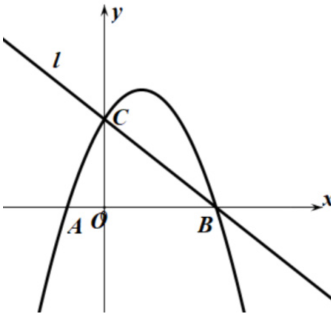

图 12

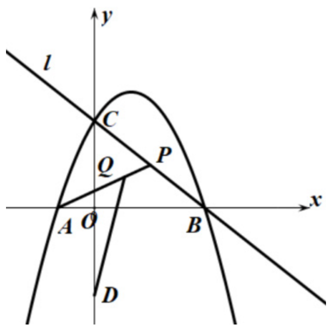

图 13

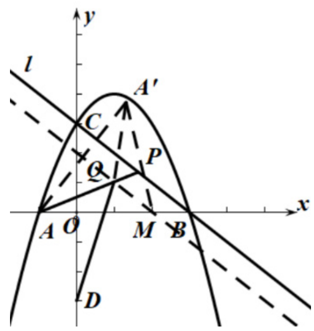

图 14

分析：第（1）题直接利用B,C两点坐标即可求出解析式。第（2）题通过设出点P的坐标，将M、N的坐标表示出来，求出PM、MN的值即可。主要关注第（3）题。所求代数式$3AP+4DQ$的特点告诉学生采用“胡不归”模型，因此将该式转化为$4\left(\dfrac{3}{4}AP+DQ\right)$，此时$k=\dfrac{3}{4}<1$，接着就要去寻找$\dfrac{3}{4}AP$可以转化为哪条线段，将求$\left(\dfrac{3}{4}AP+DQ\right)_{\min}$转化为求某线段加上$DQ$的最小值，其中$\dfrac{3}{4}$可以与题中$AQ=3PQ$联系起来，从而将$\dfrac{3}{4}AP$转化为$AQ$，将“胡不归”转化为“将军饮马”，题目难度大大降低。

解（3） 如图14，过点Q作直线l的平行线QM交x轴于点M，作点A关于直线QM的对称点A'，连接$A'Q$、$A'M$。

$\therefore 3AP+4D=4\left(\dfrac{3}{4}AP+DQ\right)=4(AQ+DQ)=4(A'Q+DQ)$，

当A'、Q、D三点共线时，$4(A'Q+DQ)_{\min}=4A'D$。

令解析式$y=0$，求出点$A(-1,0)$.

$\because QM \parallel BC, AQ=3PQ,$

$\therefore k_{QM}=k_{BC}=-1,\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{3}{4}.$

$\therefore M(2,0),l_{QM}:y=-x+2.$

$\because AA'\perp QM,AM=A'M,$

$\therefore k_{AA'}=1,l_{AA'}=x+1,$

$\therefore \angle A'AM=\angle AA'M=45^{\circ},$

$\therefore A'M\perp AM,$

$\therefore A'(2,3).$

$\because D$ 为点 C 关于 x 轴的对称点，

$\therefore D(0,\ -3),$

$\therefore l_{A'D}:y=3x-3.$

联立方程组 $\begin{cases}y=3x-3\\y=-x+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$, $i.e,Q\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{4}\right).$

$\therefore DQ=\dfrac{5\sqrt{10}}{4}.$

评注：所给代数式的形式特点直观告诉学生运用“胡不归”模型，确定系数 k，将代数式转化为 $k\left(AP+\dfrac{1}{k}BP\right)$ 的形式。本题的关键在于将 $\dfrac{3}{4}AP$ 转化为 AQ，从而实现“胡不归”模型到“将军饮马”模型的转化。因此尽管该题以二次函数为背景，归根到底还是求线段长度。

例 4（泰州市 2022 年中考模拟）如上图 7，已知在 $\text{Rt}\Delta\text{ABC}$ 中，$\angle\text{C}=90^{\circ}$. $\text{AC}=6$, $\text{AB}=9$.E 是 AB 上的点，$\text{BE}=5$. D 是线段 BC 上的一个动点，沿 AD 折叠 ΔACD，点 C 与点 C' 重合.连接 BC',EC'.

（1）求证: $\Delta\text{AEC}'\sim\Delta\text{AC}'\text{B}$.

（2）已知 F 是 BC 上的一点，且 $\text{BF}=\sqrt{5}$.

①若 $\Delta\text{BC}'\text{F}$ 与 $\Delta\text{BC}'\text{E}$ 的面积之比是 $\sqrt{5}:5$，请用无刻度的直尺和圆规在图 2 中作出折叠后的 $\Delta\text{AC}'\text{D}$（保留作图痕迹，不写作法）；

②求 $\text{BC}'+\dfrac{3}{2}\text{FC}'$ 的最小值；

评注：对于本题同样也可通过观察代数式发现其表征符合“胡不归”模型，且此时 $k=\frac{3}{2}>1$，由此提取 $k=\frac{3}{2}$，转化为 $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}BC'+CF'\right)$，再利用相似转化为求 $\frac{3}{2}(CE'+CF')$ 的最小值。利用“胡不归”模型解该题比直接利用相似复杂，但该代数式表征作为典型的“胡不归”模型，可作为讲解相似之后用于拓展学生思维。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022 年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
[2] 冀庆超.重要模型“一线三等角”[J].中学生数理化(八年级数学)(配合人教社教材),2020,No.1217(10):15-16.
[3] 窦光锋. “一线三直角”应用的三种境界[J].中学数学教学参考,2020(12):52-53.
[4] 周杨.“将军饮马”问题的求解策略[J].初中数学教与学,2023,No.493(01):20-22+37.
[5] 蔡国雄.初中几何“PA+k·PB”型的最值问题[J].数学学习与研究,2019(03):151-152.