

近五年高考平面解析几何试题的统计与分析

刘 瑞

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】 本文通过定性和定量研究方法，分析了 2019-2023 年全国高考平面解析几何试题的特点。研究发现，高考改革后，平面解析几何题目的数量增加，难度上升，且更加强调数学核心素养和逻辑推理能力。文章提出，教学应创设丰富的教学情境，激发学生兴趣；灵活运用知识，建立完整的知识体系；培养学生的逻辑推理和数学运算能力；提升教师的专业素养，挖掘教育价值。这些发现和建议对于指导教学具有重要意义。

【关键词】 高考；平面解析几何；数学核心素养

【收稿日期】 2024 年 1 月 18 日 **【出刊日期】** 2024 年 3 月 21 日 **【DOI】** 10.12208/j.aam.20240010

Statistics and analysis of plane analysis geometry questions of college entrance examination in recent five years

Rui Liu

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Through qualitative and quantitative research methods, this paper analyzes the characteristics of the 2019-2023 paper. The study found that after the reform of the college entrance examination, the number of plane analytical geometric questions increased, the difficulty increased, and more emphasis on mathematical core literacy and logical reasoning ability. This paper proposes that the teaching should create rich teaching situations to stimulate students' interest, flexibly use knowledge and establish a complete knowledge system; cultivate students' logical reasoning and mathematical operation ability, and explore the educational value. These findings and suggestions are important for guiding teaching.

【Keywords】 College entrance examination; Graphic analytic geometry; Core literacy in mathematics

1 问题提出

平面解析几何是高考数学的重要组成部分，2017 年起成为选择性必修课程的核心内容。学生需掌握点、直线、圆的性质和计算方法，以及直线方程和圆方程的推导与应用。这些知识点考察学生的数学逻辑思维和计算能力，同时也培养解决实际问题的数学建模技巧。自 2021 年起，高考数学不再区分文理科，统一使用新高考 I 卷，增加了多项选择题，改变了题型和难度。平面解析几何的考查要求也在提高，尤其在 2023 年的新高考 I 卷中，它成为了最后一题。这些变化使得学生对高考的改革方向和命题规律的把握变得更加困难。通过分析 2019-2023 年的高考试题，可以更好地理解高考改革的特点，为教学提供指导。

2 研究方法

本文采用定性和定量相结合的研究方法，从知识考查、运算水平、数学核心素养、综合难度四个维度对试题进行统计与分析，以便进一步体会平面解析几何试题的命题特点。

2.1 知识考察

对平面解析几何知识点的梳理有利于把握核心知识，明确考查要点。由于自 2020 年起不再公布高考考试大纲，本文基于 2019 年高考考试大纲及 2017 年课标对平面解析几何知识进行整理与归纳，将平面解析

几何知识分为 4 个一级知识和 13 个二级知识，并对其进行编码，具体内容如表 1 所示。

用字母表示一级知识，数字表示二级知识。如 A3 表示直线与圆的位置关系，D1 表示抛物线的定义及其标准方程。部分题目还涉及了其余内容领域的知识点，但由于题量较少，此处不再编码，而是直接在后续表格中列出。

2.2 运算水平

平面解析几何由于其知识本身的特点，经常涉及大量的数据运算，学生的运算水平对题目的解答有重要影响。本文依据武小鹏对运算水平的划分，结合高考试题中涉及的运算类型，将运算水平划分为简单数值运算、复杂数值运算与符号运算三个水平，三个水平的具体内涵见表 2。

2.3 数学核心素养

平面解析几何作为数学知识的一部分，其所蕴含的数学核心素养被认为是丰富的。文章根据 2017 年的课程标准，将数学核心素养分为六个类别：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，并据此对相关试题进行了统计分析。

2.4 综合难度

试题难度一直是 2023 年高考的热点问题，值得深入探讨。本文参考了武小鹏教授的综合难度模型，对所选高考卷中的平面解析几何试题进行了难度评估。虽然原模型用于测评整张试卷，但在此处，我们对综合难度模型进行了调整，以分析某道试题的难度系数。在维度划分方面，我们保持了基础知识和认知水平与武小鹏模型中的知识含量和认知水平维度的等级划分一致。至于数学问题和核心素养的等级划分，我们参考了 2017 年课标中对数学问题的划分以及核心素养的水平划分。对于同一道试题，我们将多个核心素养的等级取平均值，作为此题核心素养维度的总体等级。具体划分详见表 3。（由于本文已经将运算水平作为一个单独的因素划分，因此在核心素养中将不再提及数学运算部分）。

参考计算公式，记第 i 个因素（共 3 个等级）的等级为 a_i ，则该题的综合难度系数为 $d = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{3} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{15}$ 。

根据这个公式，某道题的综合难度系数在 0-1，且越接近 1，说明题目越难。

表 1 平面解析几何知识考查编码

一级知识	二级知识
A. 直线和圆	1. 直线的方程
	2. 圆的方程
	3. 直线与圆的位置关系
	4. 圆与圆的位置关系
B. 椭圆及其性质	1. 椭圆的定义及标准方程
	2. 椭圆的几何性质
	3. 直线与椭圆的位置关系
C. 双曲线及其性质	1. 双曲线的定义及其标准方程
	2. 双曲线的几何性质
	3. 直线与双曲线的位置关系
D. 抛物线及其性质	1. 抛物线的定义及其标准方程
	2. 抛物线的几何性质
	3. 直线与抛物线的位置关系

表 2 运算水平及其具体内涵

运算水平	具体内涵
简单数值运算	运算上仅存在数值上的加、减、乘、除及其混合运算
复杂数值运算	运算不存在符号参与，但存在复杂的数值运算，如涉及排列数公式、组合数公式、三角、指数、对数等
符号运算	运算有符号参与，涉及符号推导或符号关系的逻辑演绎，或运算过程有一定的技巧性

表 3 综合难度因素及等级划分

难度因素	等级 1	等级 2	等级 3
数学问题	简单问题	较复杂问题	复杂问题
知识含量	一个知识单元	二个知识单元	三个及以上知识单元
认知水平	理解	运用	分析
核心素养	水平 1	水平 2	水平 3
运算水平	简单	复杂	符号

3 研究结果

3.1 平面解析几何试题整体情况

本文通过四个维度——知识考查、运算水平、核心素养考查和综合难度——对 2019-2020 年的 6 套全国卷（理科）和 2021-2023 年的 6 套新高考卷中的平面解析几何试题进行了比较分析。由于非解答题（如选择题和填空题）与解答题在考查方式和重点上有所不同，研究采用了表 3 的框架对两种题型进行了单独的统计分析，具体结果分别记录在表 4（非解答题）和表 5（解答题）中。这样的分析有助于理解新高考改革后平面解析几何试题的变化和趋势。（①数学抽象②逻辑推理③数学建模）。

3.2 知识考查对比分析

全国卷的平面解析几何非解答题主要考查知识点 B1、B2、C1 和 C2。新高考卷增加了题量，强调综合性，考查知识点更多，包括 B1、B2、D1 和 D2，以及弦长公式、三角形、向量积等。新高考卷要求学生对于知识点有更深入的理解和应用能力，如 2023 年新高考卷 I 的第 16 题考查双曲线相关知识。

表 4 2019-2023 年全国卷（理科）和新高考卷平面解析几何非解答题统计

试卷	题号	知识含量	运算水平	核心素养	认知水平	综合难度
2019 年全国 I 卷	10	B1、B2、B3	简单	①②	运用	0.4
	16	C1、C2、C3	简单	①②③	分析	0.6
2019 年全国 II 卷	8	B1、B2、D1、D2	简单	③	理解	0.3
	11	C1、C2 勾股定理	简单	①②③	运用	0.53
2019 年全国 III 卷	10	C1、C2 三角形	简单	①②③	理解	0.4
	15	B1、B2 三角形	简单	①②③	运用	0.47
2020 年全国 I 卷	9	A2、B2、C2	简单	①②	运用	0.4
	13	D1、D2、D3	简单	①②③	运用	0.4
2020 年全国 II 卷	10	A2、B2、C2	简单	①②	运用	0.4
	14	D1、D2、D3	简单	①②③	运用	0.4
2020 年全国 III 卷	5	D1、D2、D3	简单	①②③	理解	0.4
	10	A3、导数的几何意义	复杂	①②③	理解	0.47
	11	C1、C2、三角形	简单	①②③	运用	0.53
2021 年新高考 I 卷	5	B1、B2、基本不等式	简单	①②	理解	0.4
	11	A3、勾股定理	简单	①②③	运用	0.53
	14	D1、D2、向量数量积	简单	①②	运用	0.47
2021 年新高考 II 卷	3	D1、D2、D3	简单	①②	理解	0.33
	11	A3、圆的位置关系	简单	①②	运用	0.47
2022 年新高考 I 卷	13	C1、C2	简单	①②	理解	0.33
	11	D1、D2、D3	复杂	①②	运用	0.6
	14	A3	复杂	①②③	分析	0.67
2022 年新高考 II 卷	16	B1、B2、B3、弦长公式	符号	①②③	分析	0.8
	10	D1、D2、D3、向量积	符号	①②③	分析	0.73
2023 年新高考 I 卷	15	A3	复杂	①②	运用	0.47
	16	B1、B2、B3	符号	①②③	分析	0.73
	5	B1、B2	简单	①②	理解	0.33
2023 年新高考 II 卷	6	A3、三角函数	简单	①②③	运用	0.47
	16	C1、C2、勾股定理、余弦定理、向量积	符号	①②③	分析	0.8
	5	B1、B2、B3、三角形	简单	①②③	理解	0.4
2023 年新高考 II 卷	10	D1、D2、D3、弦长公式	复杂	①②③	运用	0.67
	15	A3、弦长公式	简单	①②	运用	0.53

表 5 2019-2023 年全国卷（理科）和新高考卷平面解析几何解答题统计

试卷	题号	知识含量	运算水平	核心素养	认知水平	综合难度
2019 年全国 I 卷	19	D1、D2、D3	复杂	①②	运用	0.6
2019 年全国 II 卷	21	B1、B3 三角形性质、不等式	符号	①②③	分析	0.87
2019 年全国 III 卷	21	D1、D3、A3	符号	①②③	分析	0.8
2020 年全国 I 卷	22	B1、B2、B3、三角形	符号	①②③	分析	0.87
2020 年全国 II 卷	21	B1、B2、B3、三角形	复杂	①②③	分析	0.8
2020 年全国 III 卷	20	B1、B2、B3、全等三角形	符号	①②③	分析	0.8
2021 新高考 I 卷	21	C1、C2、C3、韦达定理	符号	①②③	分析	0.87
2021 新高考 II 卷	20	B1、B2、B3	符号	①②③	分析	0.8
2022 新高考 I 卷	21	C1、C3、韦达定理、三角函数	符号	①②	分析	0.87
2022 新高考 II 卷	21	C1、C2、C3	符号	①②	分析	0.87
2023 新高考 I 卷	22	A1、D1 导数、不等式	符号	①②③	分析	0.93
2023 新高考 II 卷	21	C1、C2、C3、韦达定理	符号	①②③	分析	0.87

解答题方面，全国卷平面解析几何题涉及 3 个以上知识点，考查学生的数学抽象和建模能力，难度较高。新高考卷也考查 3 个以上知识点，但更加灵活，与韦达定理、不等式、三角形等知识相结合。例如，2023 年新高考卷 I 第 22 题展示了多样的解题方法。总体来看，高考改革使得平面解析几何的考查题量增加，与其他数学知识的结合更为频繁，选择题难度降低，而解答题的灵活性和难度提高。

3.3 运算水平对比分析

表 4 显示，平面解析几何的非解答题主要侧重于简单数值运算，而复杂数值运算则居于辅助地位，符号运算的涉及程度相对较低。从表 5 可以观察到，在全国卷和新高考卷中，平面解析几何的解答题在运算过程中，符号运算的比例均超过一半，新高考卷甚至实现了符号运算的全面覆盖。这一现象凸显了新高考卷对符号运算考查的重视。

3.4 核心素养对比分析

全国卷的非解答题主要考查学生的数学抽象和逻辑推理能力，而数学建模的要求相对较低。例如，2020 年全国 I 卷的一道题目要求学生通过抛物线方程求焦点坐标，再用点斜式求直线方程，最后联立求解二次方程，这考查了学生的逻辑推理能力。

新高考卷在非解答题中提高了对数学建模能力的要求，如 2022 年新高考 I 卷的一道题目要求学生利用离心率求椭圆方程，再求直线斜率，最后通过弦长公式和对称性求解。解答题方面，全国卷考查学生的数学抽象、逻辑推理和数学建模能力，特别是曲线类型判断和直线与曲线相交问题。新高考卷同样考查这些能力，但增加了对逻辑推理的要求，如 2022 年新高考 II 卷的一道题目要求学生从三个条件中选择两个来证明第三个条件，这考查了学生的灵活性和推理思维。

3.5 综合难度对比分析

为研究近五年平面解析几何非解答题难度变化特征，本研究计算了同年各非解答题难度的平均值，以此作为该年度试题难度的代表，并据此绘制了折线图（图 1）。近五年的平面解析几何非解答题难度整体呈现上升趋势，以 2021 年为转折点。2019 至 2020 年全国卷的平均难度较低，为 0.44，而 2021 至 2023 年新高考卷的平均难度为 0.54，高出 0.1。新高考卷的非解答题数量增加，难度较大，尤其是填空题的压轴题，对学生的综合能力要求更高。尽管如此，独立样本检验结果表明，全国卷与新高考卷在难度上没有显著性差异。（ $p=0.22>0.05$ ）。同上绘制了折线图（图 2）。近五年来，平面解析几何解答题的难度整体上呈现出平稳上升的趋势。2019 至 2020 年全国卷的平均难度为 0.79，而 2021 至 2023 年新高考卷的平均难度稍高，为 0.86。这表明新高考卷在逻辑推理、数学建模和数学抽象能力方面的考查有所增强。尽管新高考卷的难度略高，但独立样本检验结果表明，全国卷与新高考卷在难度上没有显著性差异。（ $p=0.497>0.05$ ）。

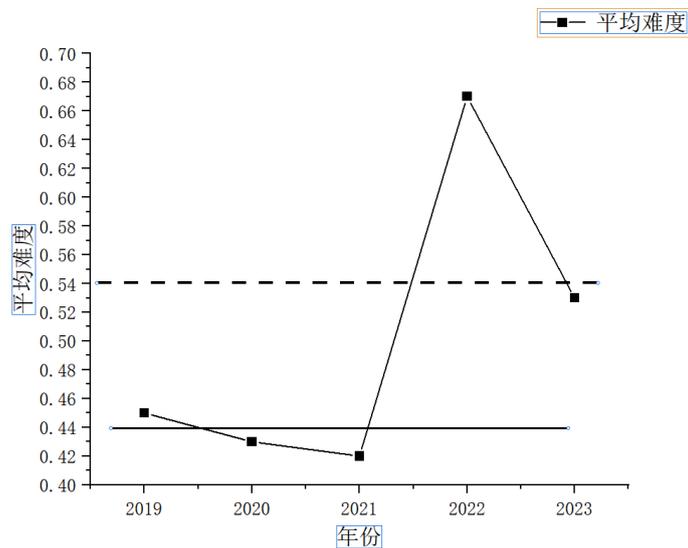


图1 非解答题难度趋势

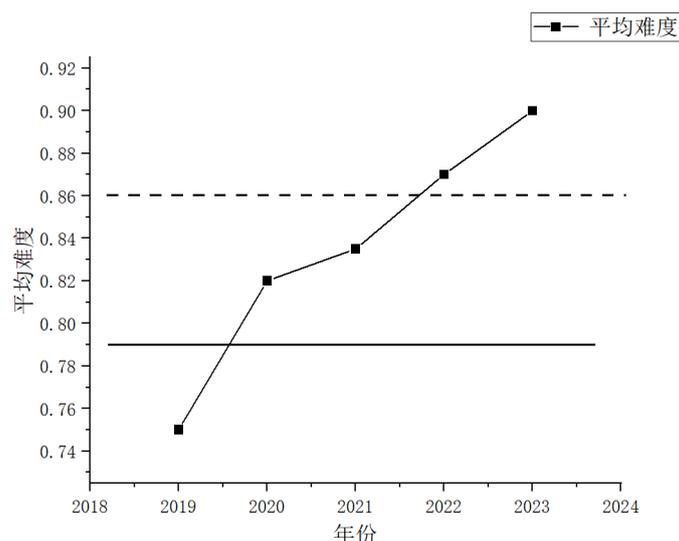


图2 解答题难度趋势

4 教学启示

4.1 创设教学情境，激发学习兴趣

在对比全国卷和新高考卷的平面解析几何试题时，我们可以看到，目前的试题主要集中在数学情境问题上，不管是解答题还是非解答题。随着新高考改革的推进，未来的高考试题很可能会包含更多与生活 and 科学相关的情境。

教育家乌申斯基曾指出，没有兴趣的学习会扼杀学生对真理的追求。因此，对于平面解析几何这样枯燥的内容，教师面临的挑战是如何创造丰富的教学情境来激发学生的思考。孔子说：“不愤不启，不悱不发”，意味着教师需要通过教学情境来引发学生的认知冲突，从而激发他们的求知欲和学习热情。

例如，在教授“抛物线的概念与定义”时，教师可以引入实际生活中的例子，比如石头被水平抛出时形成的轨迹——抛物线。这条轨迹的顶点就是石头达到的最高点。另外，拱桥的设计也常用抛物线形状，因为它在承受重力时的稳定性强，可以有效地分散桥上的重量，增强桥梁的坚固度。这些生动的例子不仅具有启发性，而且能够激发学生的探究精神，促使他们主动观察和思考抛物线的本质。这样的教学方法有助于学生

更好地理解和应用数学知识，将学习与现实生活紧密联系起来。

4.2 灵活运用知识，建立知识体系

苏霍姆林斯基提倡在学生进入中高年级后，应当减少重复性的运算练习，转而鼓励学生进行创造性的思考和劳动^[5]。新高考的平面解析几何试题相较于全国卷，更加注重考查学生解题方法和技巧的灵活运用。例如，在 2023 年新高考 I 卷的第 22 题中，学生需要证明一个矩形的周长超过一个特定的数值。解决这个问题关键是结合直线和抛物线的方程，运用弦长公式和放缩法，最后通过换元法和求导法来找到周长的最大值。这种题型要求教师在教学过程中强调解题步骤的灵活性，引导学生灵活地应用所学的知识，并深化他们对知识本质的理解，从而帮助他们构建一个完整的知识体系。

4.3 培养理性思维，发展核心素养

数学教育的核心目标是通过系统的思维训练来培养学生，重点是逻辑推理和数学运算的能力。学生需要在推理的严谨性与简洁性、运算的正确性与算法的有效性方面达到一定的水平。过去五年的全国卷和新高考卷的分析表明，平面解析几何的考查主要集中在逻辑推理和数学运算上，新高考卷在逻辑推理的考查方面更加深入，标准也更高。这反映了数学教育趋向于强化学生的逻辑思维和解决问题的能力。

4.4 提升专业素养，挖掘教育价值

2023 年高考结束后，一些学生对新高考 I 卷的难度和行程安排不满，认为解答题太难。这可能说明部分教师对数学教学理解不足，学生未能在考试中灵活运用知识。题海战术可能削弱了学生的数学兴趣，与减轻教育负担的目标相悖。教师应减少单一的题目练习，鼓励学生发展灵活思维，深入理解和应用知识。教师还需提高专业素质，深化数学教学理解，注重基础知识教学和关键能力培养。创设多样学习情境可帮助学生建立正确的数学观念，激发对数学的热爱。在终身学习的背景下，教师角色应转向引导学习，全面提升学生的数学核心素养。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020:2,4,40,81.
- [2] 武小鹏, 孔企平.基于 AHP 理论的数学高考试题综合难度模型建构与应用[J]. 数学教育学报, 2020,29(02):29-34.
- [3] 廖艺捷, 朱展霖, 胡典顺. 近五年高考概率与统计试题的统计与分析—以全国 I 卷(理科)为例[J].数学通报, 2021,60(02):56-62.
- [4] 汤语凡.近六年高考立体几何试题的统计与分析—以 2018—2020 年全国卷和 2021—2023 年新高考卷为例[J].数学通报,2023,62(11):34-41+66.
- [5] 瓦·阿·苏霍姆林斯基.给教师的建议[M].杜殿坤, 译.北京: 教育科学出版社, 1984: 15

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS