

基于情境视角的高考概率统计试题分析——以 2023 年高考数学为例

钱 婕

扬州大学 江苏扬州

【摘要】情境作为体现数学核心素养的四大方面之一,也是学业质量水平和核心素养的考察载体。同时,概率与统计是高中数学课程内容的主线之一。本文以 2023 年全国数学甲卷(理)、全国数学乙卷(理)、新高考 I 卷、新高考 II 卷等七套试卷中“概率与统计”试题为研究对象,从情境的类型和考察水平对其分析。研究发现:现实情境占比较大且层次丰富、数学情境占比较小且考察水平单一、综合水平情境常以解答题呈现且比重较大。最后对一线教师提出一些教学建议:教师应更新学科观念,促进各学科之间的交叉融合;教会学生“数学式阅读”,提高快速提取有效信息的能力;注重对概率统计知识本质的揭示,引导学生体会其蕴含的思想和方法。

【关键词】问题情境; 概率统计; 试题分析

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日 **【出刊日期】**2023 年 12 月 15 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20230023

Analysis of probability and statistics questions in college entrance examination based on situation perspective——Take the 2023 college entrance examination mathematics as an example

Jie Qian

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Situation, as one of the four aspects that reflect the core literacy of mathematics, is also the carrier of the study quality level and core literacy. At the same time, probability and statistics is one of the main lines of high school mathematics curriculum content. This paper takes the "probability and statistics" questions in seven sets of 2023 National Mathematics paper A (Science), National Mathematics paper B (Science), new college entrance examination paper I, new college entrance Examination paper II as the research object, and analyzes them from the type of situation and the level of investigation. It is found that the realistic situation is relatively large and the level is rich, the mathematical situation is relatively small and the examination level is single, and the comprehensive level situation is often presented with the solution problem and the proportion is large. Finally, some teaching suggestions are put forward for teachers: teachers should renew the discipline concept and promote the cross-integration of various disciplines; Teach students "mathematical reading", improve the ability to extract effective information quickly; Focus on revealing the essence of probability and statistics knowledge, and guide students to understand the ideas and methods contained in it.

【Keywords】 Problem situation; Probability statistics; Test item analysis

1 问题提出

情境是高考数学命题的三大要素(立意、情境、设问)之一^[1],也是学业质量水平和核心素养的考察载体。概率与统计作为高中数学内容四大主线之一,贯穿整个必修课程、选择性课程和选修课程。数学来源于生活,科技技术的发展对数据分析和逻辑推理等能力提出更高的要求,概率与统计提供了问题解决的新视角和思维模式。而在高考中,概率与统计中的问题情境往往被忽视,但其与生活联系较为紧密。本文以 2023 年概率与统计试题为对象,分析问题情境设置的特征,为概率与统计的教学和考核提供些许参考。

2 分析对象

全国卷设有文理两卷,由于文科和理科试卷有部分试题重复,因此不对全国卷的文科数学试题分析。本文选取全国甲卷(理科)、全国乙卷(理科)、新高考 I 卷、新高考 II 卷、北京卷、上海卷和天津卷,共计 7 套试卷中的 14 题为分析对象。

3 分析框架

借鉴《普通高中数学课程标准》(2017 年版)(以下简称《课标》)“学业质量水平”将情境按难度划分为熟悉、关联和综合三个水平^[2]。为使概率统计问题情境分析更具可操作性,参考吴凌菲^[3]等人对情境的划分,将情境划分为个人、职业、社会和科学四种类型,在此基础上增设“数学”情境,共五种情境类型,具体框架如表 1。

4 概率统计试题的分布分析

对 7 套试卷概率统计试题各类型情境统计如表 2。为进一步明晰各情境试题分布,在这 17 道共计 128 分的情境问题中,分别从情境类型和情境水平展开分析,五种类型的概率统计试题分值比重如图 1。

表 1 情境的分类框架

情境类型	描述
个人情境	与学生的日常生活关系密切,学生最为熟悉
职业情境	聚焦劳动,涉及测量、成本计算、调度库存、工作决策等学生难以亲历的问题
社会情境	基于社会公共生活,如投票、公共交通、公共政策等系列活动
科学情境	涉及自然科学领域等难以理解的问题,气候、生态、医学等
数学情境	主要以纯粹数学(知识、模型、思想和方法)为载体,侧重考察学生的“四基”

表 2 概率与统计试题在试卷中的分布情况

试卷	题型	情境	水平	分值
全国甲卷(理)	单选题	俱乐部报名	关联	5
	多选题	志愿服务	关联	5
	解答题	小鼠药物实验	关联	12

续表 2

试卷	题型	情境	水平	分值
全国乙卷(理)	单选题	课外读物	关联	5
	解答题	橡胶生产	关联	12
	多选题	中位数、极差	熟悉	5
新高考 I 卷	填空题	选修课	关联	5
	解答题	投篮	综合	12
	单选题	体育运动	熟悉	5
新高考 II 卷	多选题	信号发出模式	关联	5
	解答题	患病医学指标	综合	12
	解答题	农产品价格	综合	12
北京卷	填空题	GDP 生产总值	熟悉	5
	单选题	身高与体重	关联	4
	解答题	世纪汽车博览会	关联	14
上海卷	单选题	身高与体重	关联	4
	解答题	世纪汽车博览会	关联	14
	单选题	群花萼长度	关联	5
天津卷	单选题	群花萼长度	关联	5
	填空题	摸球	关联	5

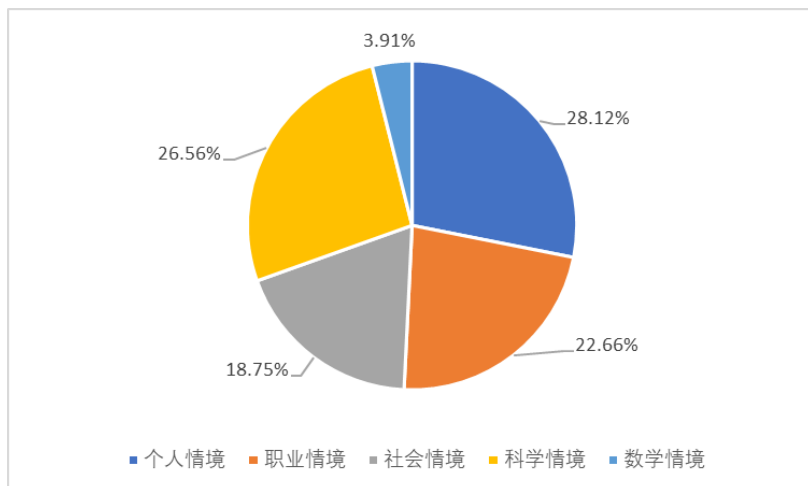


图1 概率统计试题各类型问题情境

从情境类型分值占比上，个人情境所占比重最大（28.12%），其次是科学情境（26.56%），数学情境占比最少（3.91%）。《课标》将情境分为现实情境、数学情境和科学情境^[2]，现实情境主要指的是以现实生活为素材，基于学生已有生活经验创设的情境，因此将个人、职业和社会情境视为现实情境。现实情境作为高考评价体系四翼之一，所占比重达 69.53%，符合应用性要求，以贴近时代、贴近社会、贴近生活的生活实践或学习探索问题情境为载体，将陈述性知识与程序性知识的有机整合和运用作为考查目标^[4]。

情境按难度又划分为熟悉、关联、综合三大水平，将个人情境、职业情境和社会情境视为现实情境，情境分为现实情境、数学情境和科学情境，按上述三种水平划分为 9 种子情境，并整理出高考试题的九种子情境的考察比重（分值占比），见图 2。

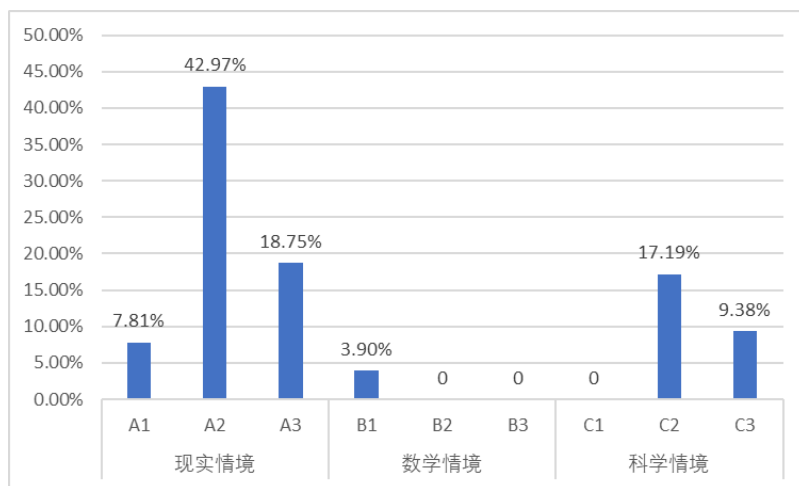


图2 九种子情境的分布

注：A, B, C 分别代表现实情境、数学情境、科学情境，分别用 1, 2, 3 表示每种情境按按难度划分的熟悉、关联、综合三个水平。

从情境的三水平上，关联水平情境比重最大（60.16%），熟悉水平占比最小（7.81%）。整体来看，概率统计试题中现实情境关联水平（A2）在 2023 年高考试卷中的占比最大（42.97%），而数学情境关联水平（B2）、数学情境综合水平（B3）及科学情境熟悉水平（C1）占比最小（均为 0%）；试卷主要以考察的关联情境和综合情境为主（88.29%），结合试题考察题型，熟悉水平常以纯粹的数学情境考察对概率与统计的掌握，比如中位数、极差等基本计算，综合水平情境通常以解答题的形式考察学生解决问题的能力，也涉及函数思想、数列方法等思想。

5 典型试题分析

高考的核心功能是立德树人、服务人才，引导教学，构建德智体美劳全面培养的教育体系是新时代和高考的重要任务^[5]。综合以上统计分析结果，可以发现 2023 年高考数学概率统计试题的特点有：现实情境占比较大且层次丰富、数学情境占比较小且考察水平单一、综合情境常以解答题呈现且比重较大。

5.1 现实情境占比较大且层次丰富

例 1（2023·新高考 II 卷 3）某学校为了了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取 60 名学生，已知该初中部和高中部分别有 400 名和 200 名学生，则不同的抽样结果共有（ ）

- A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ 种 B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ 种 C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ 种 D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种

新高考 II 卷第 3 题以学生体育运动情况为情境的载体，考察学生的数据提取能力和分层抽样知识。学生只要从情境直接抽象出数学关系，无复杂的数学运算，但通过试题渗透“数学源于生活”的理念，启发学生善于从生活中发现数学、用数学解决实际问题。

例 2（2023·全国乙卷 17）某厂为比较甲乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率，甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别为 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, 10)$ ，试验结果如下：

试验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率 X	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率 Y	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记 $z_i = x_i - y_i (i=1, 2, \dots, 10)$ ，记 z_1, z_2, \dots, z_{10} 的样本平均数为 \bar{z} ，样本方差为 s^2

(1) 求 \bar{z}, s^2 ；

(2) 判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高（如果 $\bar{z} \geq 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$ ，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高）。

全国乙卷第 17 题以橡胶生产的劳动生产情境为载体，比较甲、乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，考察学生数据提取能力和应用概率与统计知识分析问题、解决问题的能力，充分体现立德的教育理念，运用概率统计知识解决生产实际问题，引导学生认识数学在现实生活的应用价值，引导学生关注劳动、尊重劳动、学会劳动。第（1）问利用平均数公式计算出 \bar{x}, \bar{y} 即可计算出 \bar{z} ，再得到所有 z_i 的值，最后计算出方差。第（2）问看似复杂的问题情境，但实则建立在第（1）问的结果基础上，考察学生在新情境中对旧知识的理解和探究能力。前者需简单的推理应用和数学运算，属于熟悉水平，后者属于关联水平。

5.2 数学情境占比较小且考察水平单一

例 3（2023·新高考 I 卷 9）（多选）有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 ，其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则（ ）

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均值
 B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
 C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
 D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

新高考 I 卷第 9 题直接考察平均数等概念, 学生直接抽象出问题特征和知识背景, 属于熟悉水平。数据以字母表示, 具有一定抽象性, 学生只需根据概念逐项分析判断, 通过举反例等方法排除选项。高考数学概率统计试题中较少以纯数学情境呈现问题, 此类考察形式难度不大。

5.3 综合水平情境常以解答题呈现且比重较大

例 4 (2023·新高考 II 卷 19) 某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异, 经过大量调查, 得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图:

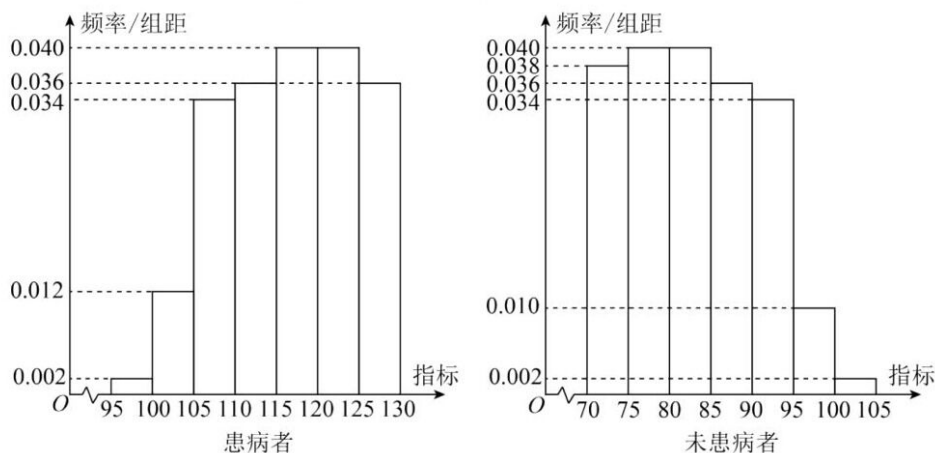


图 3 频率分布直方图

利用该指标制定一个检测标准, 需要确定临界值 c , 将该指标大于 c 的人判定为阳性, 小于或等于 c 的人判定为阴性。此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率, 记为 $p(c)$, 误诊率为未患病者检测为阳性的概率, 记为 $q(c)$, 假设数据在区间内均匀分布, 时间发生的频率作为相应事件发生的概率。

(1) 若漏检率为 $p(c) = 0.5\%$, 求临界值 c 和误诊率 $q(c)$;

(2) 设函数 $f(c) = p(c) + q(c)$, $c \in [95, 105]$, 求 $f(c)$ 的解析式, 并求出 $f(c)$ 在 $[95, 105]$ 的最小值。

新高考 II 卷第 19 题以医学指标为情境载入概率统计的考察, 考察学生数据提取能力和频率直方图的掌握。(1) 只要根据第一个图求出 c , 再结合第二个图求出大于 c 的矩形面积即可。(2) 根据题意确定分段点 100, 求出 $f(x)$ 的解析式, 再根据分段函数的最值求解得最小值。将函数的最值求解和概率统计巧妙地结合起来, 属于综合水平, 意在深化学生对函数思想的认识, 丰富了数据处理、逻辑推理等数学核心素养。另外, 高考试题解答题常以综合水平情境考察对概率统计知识的理解, 如全国 I 卷第 21 题以投篮为情境, 融合等比数列等考察两点分布和全概率公式; 北京卷第 18 题以农产品价格变化为背景, 既有现实意义, 又体现数学学科的应用价值。

6 启示与建议

2023 年高考数学概率统计试题情境新颖, 贴合实际生活, 考察水平丰富。结合上述试题特征, 得到以下启示与建议。其一, 教师应更新学科观念, 促进各学科之间的交叉融合, 有意识地设置一些跨学科数学问题, 给予学生自主探索、合作交流的机会。在例题、练习题、考题的选择与编拟应注意“情境的新颖性”, 情境问题设计具有阶梯性、开放性, 体现以数学思维方法为主线的内在脉络结构。其二, 教会学生“数学式阅读”, 提高快速提取有效信息的能力, 不难发现概率统计的解答题字符越来越多, 要想顺利解决问题, 需建立在阅读基本功和对知识掌握的熟悉度上。因此, 教师在教学实践中可增设具备阅读量的题目, 扩充学生的学习兴趣。其三, 概率与统计不仅是高中阶段必须掌握的知识, 还是大数据时代的必备技能, 也是数据处理、数学建模等核心素养的重要载体。在教学中注重对概率统计知识本质的揭示, 引导学生体会其蕴含的思想和方法, 如演绎、检验思想等, 渗透数据分析、逻辑推理等核心素养。

参考文献

- [1] 赵轩, 任子朝. 高考概率统计试题考查目标的沿革与实现[J]. 数学通报, 2019, 58(10): 39-43.
- [2] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准 2017 年版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 180.
- [3] 吴凌菲, 胡典顺. 2021 年高考试题数学建模素养考查情况探析[J]. 教学月刊·中学版(教学参考), 2022, (Z1): 22-27.
- [4] 教育部考试中心. 中国高考评价体系说明[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 36,31,9.
- [5] 任子朝, 赵轩. 基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J]. 中国考试, 2019, (12): 27-32.

版权声明: ©2023 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

