Weibull 分布的三参数的估计和高镇同法

徐家进

力中国际融资租赁有限公司　广东广州

【摘要】三参数 Weibull 分布在结构疲劳、可靠性等领域起了越来越大的作用，人们根据有关数据来从不同的角度提出估计 Weibull 分布的三个参数提出了许多方法。这些方法各有所长，但似乎都存在这样或那样的问题：1. 估计参数的数学推导比较繁琐，得到的结果也不容易解出；2. 为简化估计的困难程度，往往假定位置参数为零或将数据取对数；3，得到的估计参数结果有时会违反 Weibull 分布参数的物理意义。作者最近几年提出的高镇同法以及推广了的高镇同法，在一定程度上克服了上述问题，且同时能给出估计参数的置信区间，得到了比较令人满意的结果。

【关键词】三参数的 Weibull 分布；Weibull 分布的 3 个参数的估计；高镇同法；广义高镇同法；升级的高镇同法

【收稿日期】2024 年 12 月 12 日　【出刊日期】2025 年 1 月 18 日　【DOI】10.12208/j.jer.20250003

Estimation of three-parameters of Weibull distribution and Zhentong Gao method

Jiajin Xu

L & Z International Leasing Co. Ltd., Guangzhou, Guangdong

【Abstract】The three-parameters Weibull distribution has played an increasingly important role in fields such as structural fatigue and reliability. Many methods have been proposed to estimate the three parameters of the Weibull distribution from different perspectives based on relevant data. These methods each have their own strengths, but it seems that they all have some problems: 1. The mathematical derivation of estimating parameters is quite cumbersome, and the results obtained are not easy to solve; 2. To simplify the difficulty of estimation, it is often assumed that the position parameter is zero or the data is logarithmically represented; 3. The estimated parameter results obtained sometimes violate the physical meaning of Weibull distribution parameters. In recent years, the author has proposed and promoted the Zhentong Gao method, which to some extent overcomes the above problems and can also provide confidence intervals for estimating parameters, achieving satisfactory results.

【Keywords】Three-parameters Weibull distribution, Estimation of three-parameters of Weibull distribution, Zhentong Gao Method; Generalized Zhentong Gao Method; Upgrade Zhentong Gao Method

1 导论

对于从事结构疲劳、可靠性等有关方面工作或者研究的人员是熟悉 Weibull 分布的，同时也明白其三个参数的估计是相当不容易的事情。比较简单的方法是图解法[1]，但此法粗糙且不方便，所谓解析法[2]解超越方程组也是很麻烦的事情，且会出现 Weibull 分布的位置参数大于给出疲劳寿命数据中的最小值这样的问题[3]。当然还有矩法（MOM）[4]、最小二乘法（LSM）[5]，最大似然法（MLE）[6],[7]等。但无论哪一个方法都免不了数学推导复杂，计算不易的问题。更加重要的是计算结果并不理想。那如何解决这些问题呢？以往有两个办法：一个是将 Weibull 分布的 3 个参数减少 1 个，即将其位置参数归零[4],[8]，于是只是剩下两个参数（形状参数和尺度参数）就使得问题的复杂性大大降低；另一个办法是将不对称的原始数据取对数[1]，使得取了对数的数据比较接近对称然后用高斯分布来拟合，即干脆不用 Weibull 分布了。作者将上述方法简称为估计 Weibull 分布参数的传统方法。

根据高镇同先生提出的关于 Weibull 分布的特

点，即它的位置参数 x_0 具有 100%可靠度且满足如下不等式[3]：

$$0<x_0<x \tag{1}$$

再利用 Python 语言的特点作者提出了高镇同法[3,9-11]，比较好地克服了传统方法的不足之处。且在这个基础上进一步推广了高镇同法[12],[13]，这样不仅可以估计出 Weibull 分布的 3 个参数，而且可以给出它们的置信区间。

2 传统方法的简单回顾

众所周知，Weibull 分布的 CDF（累积分布函数）和 PDF（概率密度函数）分别为，

$$F(x)=1-\exp\{-[(x-x_0)/\lambda]^b\} \tag{2}$$

$$f(x)=(b/\lambda)\ [(x-x_0)/\lambda)]^{b-1}\exp\{-[(x-x_0)/\lambda]^b\} \tag{3}$$

其中，b, λ, x_0 分别为 Weibull 分布的形状参数、尺度参数和位置参数（在此也称为安全寿命）。

现对传统方法中的矩法、最小二乘法及最大似然法做一个简单的回顾。

2.1 矩法（MOM）

设 X 为实际观察到的数据集，那么其 k(=1,2,…) 阶矩为，

$$E(X-x_0)^k=\int_0^\infty(b/\lambda)(x-x_0)[(x-x_0)/\lambda]^{b-1}\exp\{[(x-x_0)/\lambda]^b\}dx \tag{4}$$

设 $u=[(x-x_0)/\lambda]^b$，即得 $E(X-x_0)^k=\lambda^k\Gamma(1+k/b)$ (5)

因此，$E(X)=x_0+\lambda\Gamma(1+1/b)$ (6)

$$E(X^2)=2x_0E(X)-x_0^2+\lambda^2\Gamma(1+2/b) \tag{7}$$

$$E(X^3)=x_0^3-3x_0^2E(X)+3x_0E(X^2)+\lambda^3\Gamma(1+3/b) \tag{8}$$

而（6）-（8）的右边都可由均值来近似，$E(X^k)\approx(1/n)\Sigma_i x_i^k$, k=1,2,3。这就是所谓矩法。显然这个 3 次超越方程组是不容易解的。为了克服这个困难，人们想了许多办法，方法之一就是高镇同在[1]中的所谓解析法就是矩法的一个变形，即利用

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda^2[\Gamma(1+2/b)-\Gamma^2(1+1/b)] \tag{9}$$

而这里的 Var(X)可用数据的标准差 s 的平方来近似。再利用数据的中值 x_m 意味着此时的概率为 1/2，即从(2)可得，$\ln 2=[(x_m-x_0)/\lambda]^b$ (10)

而数据的中值是可由 Python 中得到的，这样解由（4），（9）.（10）组成的方程组就比较容易了。不过这样一来有时候发生估计出来的位置参数会大于数据的最小值这样一个问题，即违反了不等式（1）。恰恰是为了解决这个问题，本人才提出了高镇同法[3]。

2.2 最小二乘法（LSM）

最小二乘法是常用来估计 Weibull 分布 3 个参数的方法，但人们常常将位置参数归零[4]：

由(2)可得，$P=1-F(x_p/\lambda)=\exp[-(x_p/\lambda)^b]$ (11)

这里 P 是可靠度，其估计值可利用[1]中的结果，于是（11）在取二次自然对数后可得，

$$\ln(\ln(1/p_i))=b\ln(x_i)-b\ln(\lambda) \tag{12}$$

其中，p_i=1-i/(n+1)。再设，

$$Y_i=\ln(\ln(1/p_i)),\ X_i=\ln(x_i) \tag{13}$$

即有 $Y_i=bX_i+d$ (14)

其中，$d=-b\ln(\lambda)$，即 $\lambda=\exp(-d/b)$ (15)

这样可通过最小二乘法来确定 b 以及 λ。但无法定出位置参数。在[5]中尽管做出了努力，将位置参数考虑进去，但方法还是比较麻烦，写代码也不容易。而本人提出的高镇同法恰恰是利用高先生强调的位置参数的物理意义和 Python 语言改进了计算方法，以致能够比较简单地估计出 Weibull 分布的 3 个参数[3]。

2.3 最大似然法（MLE）

利用最大似然法的好处是能够比较好地估计出 Weibull 分布的 3 个参数，但其缺点也比较明显，直接解如下三个超越方程组是相当麻烦的事情。

按照（3）不难得到威布尔分布的取了对数后的似然函数，

$$LL=\ln L=n\ln(b/\lambda)+(b-1)\ \sum_{i=1}^{n}\ln[(x_i-x_0)/\lambda]-\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_0)/\lambda]^b \tag{16}$$

而所谓的极大似然估计就要确定出合适的参数 b, λ 以及 x_0 使得 LL 极大。按照习惯的做法就是将上式分别对 b,λ,x_0 取偏导数且使其为零，然后解出这三个参数的值:

$$\partial LL/\partial b=n/b+\sum_{i=1}^{n}\ln[(x_i-x_0)/\lambda]-\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_0)/\lambda]^b\ln[(x_i-x_0)/\lambda]=0 \tag{17}$$

$$\partial LL/\partial\lambda=-n/\lambda-n(b-1)/\lambda+(b/\lambda)\ \sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_0)/\lambda]^b=0 \tag{18}$$

$$\partial LL/\partial x_0=-(b-1)\Sigma_{i=1}^{n}1/(x_i-x_0)+(b/\lambda)\ \sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_0)/\lambda]^{b-1}=0 \tag{19}$$

按照极大似然估计就要解（17），（18）和（19）这三个联立的非线性方程组，如果没有计算机大概是很难或者说几乎是不可能求得解的，这大概也是在计算机没有普及的年代无法使用极大似然估计来估计威布尔分布 3 参数的主要原因吧。不过即使使用计算机来解这个非线性方程组也绝对不是一件轻松的事情。这是因为人们无法保证一定有解，即使有解也无法保证是唯一的。更加致命的是如果初始

值选择不当，那么很可能使得本来有解的问题变得无解[6]。本人按照高镇同法的思路提出了广义高镇同法，也比较好地解决了这个问题[14]。

3 高镇同法及其发展简介

3.1 高镇同法及升级的高镇同法

上一节已经简单介绍了估计 Weibull 的 3 个参数主要的传统方法，尽管各有所长，但都存在一个主要问题就是推导公式繁琐且计算也不容易，更重要的是没有注意到高先生指出的 Weibull 位置参数的物理意义及不等式（1）。

因此对于 LSM 中的位置参数是不能顺便归零的。根据高先生对 x_0 的理解它必须在区间（0, x_{min}）中，其中 x_{min} 是数据集中的最小值。因此可通过“蛮力法”逐点计算与 x_0 相应的相关系数 r，而精度取决于实际情况的需要，这样就可定出使得 r 最大的 x_0，从而定出相应的另外两个参数 b 和 λ。这就是高镇同法[3]：“1. 输入原始数据，若原始数据是没有排好序的，则先排序；2. 利用 Python 中的 scipy 可直接通过以给定精度的间隔来遍历 x_0 的可能值区间（0, x_{min}）以求出使得相关系数最大的 x_0 即 x_{0amx}. 3. 注意到在 scipy 中计算相关系数时事实上是先求出最小二乘法中直线方程的相应系数 b 和 d→λ=exp（-d/b）。因此一旦定出了 x_{0amx}，则威布尔分布相应的参数 b 与 λ 也就同时得到了”。其优点是无需进行复杂的数学推导，也无需去解 3 个超越方程组。Python 代码也非常简单，几乎一看就明[9]。

例 1. 还是利用[15]中的“关于齿轮轮齿断裂的数据”，现用高镇同法来估计拟合的 Weibull 分布的三个参数，利用 Python 代码[9],[11]可得，

由高镇同法得到的结果如下：

N= [39.56, 40.04, 40.92, 43.55, 43.55, 43.76, 43.92, 44.88, 44.88, 47.37, 47.37, 49.4, 49.64, 52.2, 53.53, 53.73, 54.18, 54.44, 56.03, 56.98, 57.46, 58.44, 61.75, 61.97, 62.5, 62.8, 62.8, 65.73, 67.4, 68.88, 71.83, 72.09, 72.09, 72.09, 72.09, 73.66, 75.82, 75.82, 75.82, 76.46, 82.46, 86.0, 87.14, 89.36, 90.44, 91.97, 95.12, 97.54, 99.67, 101.36, 101.73, 101.73, 103.08, 103.95, 106.09, 106.09, 107.89, 108.8, 109.72, 115.94, 119.91, 122.37, 124.0, 124.0, 125.5, 131.99, 139.48, 155.57, 176.46, 198.48, 231.99]（10^2）

r= 0.99610, bm= 1.145, λ= 49.52 , N0= 38.14

高斯分布与理想可靠度的相关系数= 0.98311

威布尔分布与理想可靠度的相关系数= 0.99692

威布尔分布与理想可靠度的相关系数（[16]）= 0.99636

而[16]中的结果是：b=1.129; λ=46.42, x_0=39.41

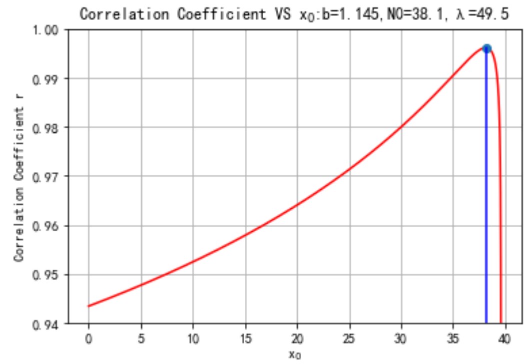

图 1 安全寿命与相关系数图

不难看出高镇同法得到的 Weibull 分布的 3 个参数的效果明显好于[15]中得到的结果。至于用高斯分布来拟合显然没有用 Weibull 分布拟合来的好。

高镇同法用于通过 LSM 来确定位置参数进而利用 Python 的库就比较容易几乎同时确定其他 2 个参数。但却无法估计这 3 个参数的置信区间。但如果利用 MC 算法，即用随机的方法代替蛮力法，如同自助法[16]就有可能估计出置信区间。当然在此还需要利用 MH 算法[17]的特点使得合适的随机值能够很快累积起来而找到合适的极值。于是我们可考虑将这个特点来升级高镇同法。即将高镇同法的第 2 点改称为，“在区间[0, x_{min}）中均匀抽样，按照 MH 的特点估计出使得相对系数最大的 x_0”。还因为 MC 的随机性，每一次计算出来的 3 个估计值是不会严格相同，因此可以重复计算比如 100 次，由此得到的每一个参数的分布可视为正态分布，由此可得到每个参数的均值和相应的置信区间。为得到升级后的高镇同法可分两步走：1. 先完成对高镇同法的升级，与原来的高镇同法结果进行比较；2. 再对升级了的高镇同法进行多次计算，根据中心极限定理可得到三个参数高斯分布，从而得到它们的置信区间。修改 Python 代码即可得，

γ= 0.95，整体抽样次数= 100

b 的置信区间是（1.065, 1.25）av=1.158

λ 的置信区间是（48.457, 51.017）av=49.737

N0 的置信区间是（36.898, 39.042）av=37.970

Z.T.Gao_MC:, b=1.158, λ=49.74, N0=37.97, r=0.99701, R^2=0.99399

这个结果似乎比高镇同法还要好一些，最重要的是得到了各个参数的置信区间。

3.2 广义高镇同法和升级的广义高镇同法

2.3 节已经提到作者利用高镇同法的思路来改进 MLE，从而得出广义高镇同法，而且也需要高镇同法提供这个 3 个参数的估计以便得到其“合理范围”[12]。不过这个方法也存在的一个问题是计算量比较大。因此类似对于高镇同法的升级，对于广义高镇同法也用随机抽样代替蛮力法进行升级[18]。

例 2. 仍然利用[15]中的“关于齿轮轮齿断裂的数据”，通过 Python 代码可得如下结果，

GZT_MC 法计算得到的参数：b= 1.148, lamda= 49.56, N0= 38.11, r= 0.99628

GZT 法计算得到的参数：b= 1.148, lamda= 49.60, N0= 38.11, r= 0.99628

Z.T.Gao:b=1.148, λ=49.60, N0=38.11, r=0.99700, R^2=0.99394, LL=-340.776

总体抽样次数= 1000, γ（置信水平）= 0.95

实际整体抽样最大次数= 229

G_GZT-MC：b= 1.137, λ= 46.68, N0= 39.37, LL= -339.853

bs= 0.021, λs= 0.92, N0s= 0.09, LLs= 0.03314

G-Z.T.Gao:b=1.137, λ=46.68, N0=39.37, r=0.99631, R^2=0.99213, LL=-339.810

G-GZT_MC（Median）：b= 1.137, λ= 46.68, N0= 39.38, LLm= -339.847

b 的置信区间是（1.096, 1.178）

λ 的置信区间是（44.881, 48.47）

N0 的置信区间是（39.19, 39.543）

G-ZTG 的结果和 G-ZTG-MC 的结果几乎是相同的，但 G-GZT-MC 的运行速度将快得多。

4 高镇同法与传统方法的比较

现可用高镇同法、广义高镇同法及升级了的高镇同法（以后为方便简称为高镇同法）与传统方法进行一个比较，就比较容易看得出高镇同法的优点了。

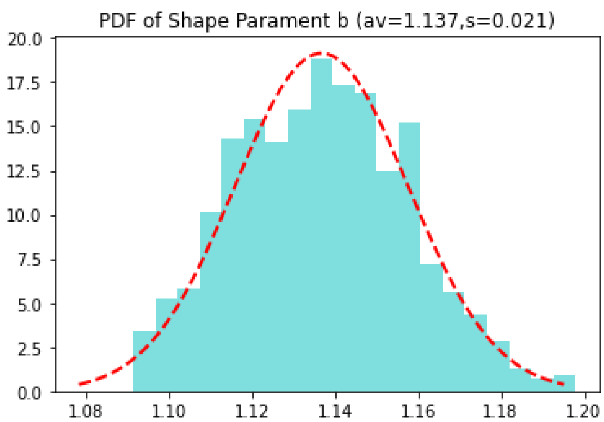

图 2 形状参数 b 的直方图

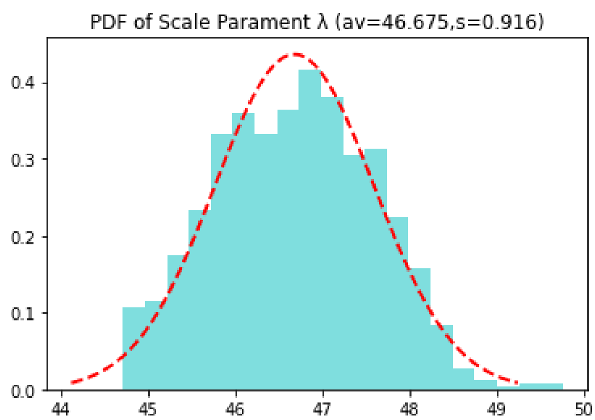

图 3 尺度参数 λ 的直方图

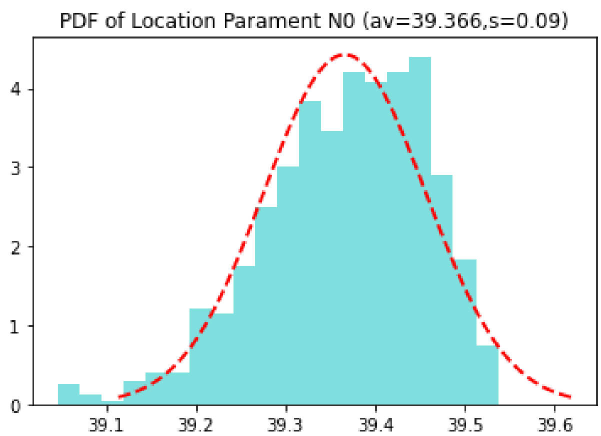

图 4 位置参数 N0 的直方图

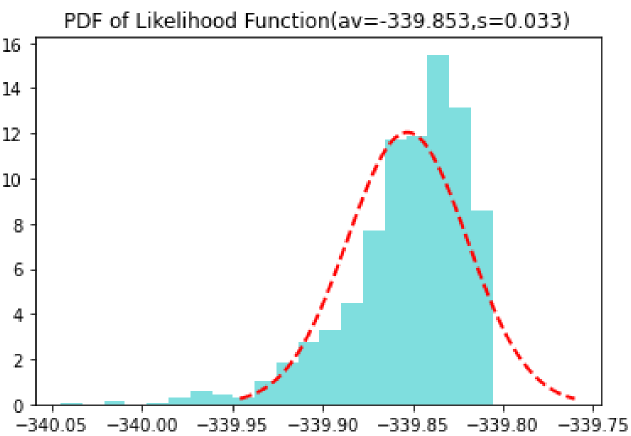

图 5 对数似然函数的直方图

例 3. 利用[20]的数据和结果进行对比，可得下面 3 个表。

Parameter point estimation under three sets of constant stress tests (T=333.15k)

	b	λ	N0	R^2	Q	LL
GZT Method	2.352	5352.28	6004.00	0.99470	0.48509	-88.96
G_GZT Method	2.433	4847.53	6266.74	0.98333	0.33455	-88.58
Method in [21]	2.565	5216.73	6079.22	0.98738	0.49945	-88.61
Method in [20]	1.400	3336.35	7759.05	0.97370	0.43268	-88.58

Parameter point estimation under three sets of constant stress tests (T=353.15k)

	b	λ	N0	R^2	Q	LL
GZT Method	1.925	1945.66	3084.00	0.99127	0.47473	-80.33
G_GZT Method	1.976	1845.09	3203.75	0.98627	0.62681	-79.97
Method in [21]	2.344	2050.78	2963.08	0.98423	0.48603	-79.97
Method in [20]	1.454	1427.34	3520.98	0.97076	0.47560	-79.80

Parameter point estimation under three sets of constant stress tests (T=378.15k)

	b	λ	N0	R^2	Q	LL
GZT Method	3.208	898.57	1562.00	0.98766	0.58381	-68.64
G_GZT Method	3.355	823.71	1631.42	0.98378	0.59522	-68.24
Method in [21]	2.989	775.46	1674.80	0.98672	0.55331	-68.31
Method in [20]	1.495	465.12	1958.23	0.96427	0.56154	-68.45

注：所谓“Method in [21]”是指在文献[21]中使用的方法，即是一种先假定位置参数为零，利用 MLE 定出形状参数和尺度参数，再回过头来利用（6）求出位置参数这样一种方法。“Method in [20]”是指在文献[20]中使用的方法，即是一种修改后的 MLE。而所谓 Q 值是指得到的 Weibull 分布与“理想的秩分布”的差之绝对值之和，很明显 Q 值越小越好[20]。R^2 则表示决定系数。LL 则是对数的似然函数。

由此可见，高镇同法在决定系数方面是领先的，而广义高镇同法在似然函数方面表现比较出色。

5 高镇同法及发展了的高镇同法在解方程和求极值中的应用

高镇同法从它诞生的那一刻起就指出了高镇同法不仅在估计 Weibull 分布的三个参数中起到了很好的作用，其实在解方程和求极值等领域中同样起着很好的作用[3],[10],[13]。现仅举两个例子来说明之。

例 4. 在[9]中的（3.2-18）和[11]中的（3.27）给出了如下超越方差，

$$\Gamma(1+3/b)-3\Gamma(1+1/b)\Gamma(1+2/b)+2\Gamma^3(1+1/b)=0 \qquad (20)$$

现用升级后的高镇同法来解这个方差，修改 Python 代码可得，

k（对分次数）= 7, E（精度）= 1e-05, b=3.60156

k（抽样次数）= 12, E（精度）= 1e-05, b=3.60157

两个方法得到的结果几乎是没有差别的，收敛都相当快，也表明升级后的高镇同法也是一个行之有效的解方程的一个方法。

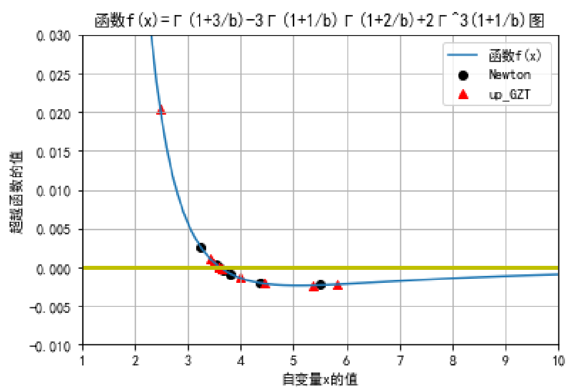

图 6　升级高镇同法与牛顿法解超越方程示意图

例 5. 利用[22]中的一条例题，如图（可参考，多元函数的极值及其求法_多元函数求极值-CSDN

博客）所示，有一块宽为 24 的铁板，将其折起来使得其截面积最大，那么 x 和 α 应该取多少？

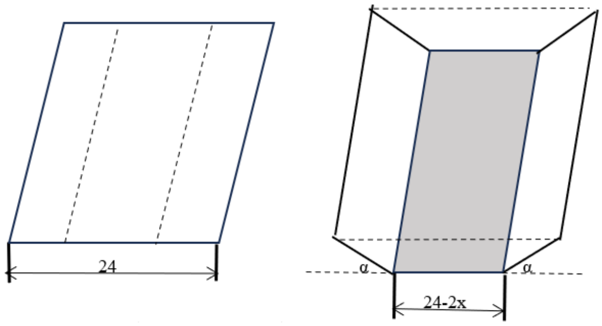

图 7 例 5 的示意图

解：不难给出其截面积为，A=[(24-2x)+(24-2x+2xcosα)](1/2)*xsinα

当然可以按照通常的做法对 A 分别取 x 和 α 的偏导数然后使其为零而解出 x 和 α。

即可得，∂A/∂x=(12-2x+xcosα)sinα=0

∂A/∂α=[12cosα-xcosα+x(cos2α-sjin2α)/2]x=0

然后解这个方程组,x=8; cosα=1/2→α=π/3

但一般情况是很难得到解析解的，即需要用计算机求出数值解，这就变成了求一个求超越方程组的问题，同样可通过升级后的高镇同法来解之。于是根据题意写出 Python 代码可得如下结果，

k（整体次数）= 100, E= 1e-10, 置信度 γ= 0.95

A 的置信区间是（82.058, 83.532）av=82.795

x 的置信区间是（7.111, 8.818）av=7.965

α 的置信区间是（53.858, 66.44）av=60.149

A_av=83.13737 精确

A_max=83.13844

在此要说明一下的是所谓“A_av”是指用 x_av,α_av 的值代入 A 的公式而得到的 A 的精确值，而 A_max 是用升级的高镇同法得到的 A 值。两者还是相当接近的。

6 结论

通过以上讨论可得如下几个结论：

1. 高镇同法基于对 Weibull 分布的位置参数的物理意义的理解而得到的一个估计 Weibull 分布三个参数的方法，相比传统的方法，高镇同法推导简单，写代码也相对简单，而且升级了的高镇同法更加可以给出这三个参数的置信区间。

2. 高镇同法和升级的高镇同法不仅可以解决估计 Weibull 分布 3 个参数的估计问题，而且还可以解决解复杂的方程和方程组，进而解决求极值问题，并且可进一步推广到求解最优化问题。

3. 高镇同法和升级的高镇同法也是疲劳统计学智能化的一个有益尝试，可以预料在不远的将来会有更多的应用和更大的发展。

致谢：感谢高镇同院士、万伟浩先生对本文及相关研究工作的支持。同时还要感谢马鹏程先生、杨潇璐女士及王国贤女士在计算机技术等方面的帮助。

参考文献

[1] 高镇同,疲劳应用统计学[M]. 北京：国防工业出版社,1986

[2] 高镇同, 熊峻江, 疲劳可靠性[M], 北京:北京航空航天大学出版社,2000

[3] 徐家进.疲劳统计学智能化中的.高镇同法[J], 北京航空航天大学学报, 2021,47(10): 2021,4 7(10):2021-2033

[4] Ivana P and Zuzana S, Comparison of Four Methods for Estimating the Weibull Distribution Parameters[J], Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, 2014, no. 83, 4137 – 4149, HIKARI Ltd, www.m-hikari.com, http://dx.doi.org/10.12988 / ams.2014.45389

[5] 傅惠民,高镇同,确定威布尔分布三参数的相关系数优化法[J], 航空学报,1990,11(7): A323-A327

[6] 严晓东,马翔,郑荣跃,吴亮[J], 三参数威布尔分布参数估计方法比较[J],宁波大学学报,2005,9, V18(3)

[7] 胡恩平,罗兴柏,刘国庆[J], 三参数 Weibull 分布的参数估计方法[J],沈阳工学院学报,2000,9,V.19(3)

[8] 张平等, 两参数 Weibull 分布参数的联合置信区间[J], 数学理论与应用 2010, V.3, No.3]

[9] 高镇同,徐家进[M],智能疲劳统计学, 北京 ：北航出版社,2022

[10] Jiajin Xu & Zhentong Gao, From Gaussian Distribution to Weibull Distribution[J], Global Journal of Researches in Engineering: I Numerical Methods, Volume 23, Issue 1 Version 1.0 Year 2023, Doi:10.34257/GJREIVOL23IS1PG1

[11] Gao Z T & Xu J J[M],Intelligent Fatigue Statistics, London: CRC Press, 2024 Doi:10.1201/9781003466477

[12] Xu J J[J], Generalized Zhentong Gao Method for Estimating Three Parameters of Weibull Distribution, SCIREA Journal of Computer, 8(2). 2023

[13] Xu J J[J], Using Monte Carlo method to Upgrade Zhentong Gao method, World Journal of Advanced Research and Reviews, 2024, 22(02), 633–640, Doi: https://doi.org/10.30574/wjarr.2024.22.2.1391

[14] 徐家进&高镇同.疲劳统计学智能化进一步的研究[J],航空学报,2022,43(8)

[15] Xu J J, Digital Experiment for Estimating Three Parameters and Their Confidence Intervals of Weibull Distribution[J], International Journal of Science, Technology and Society, Vol. 10, No. 2, 2022, pp. 72-81, Doi: 0.11648 /j.ijsts. 20221002.16

[16] Xu J J, Generalized Zhentong Gao Method for Estimating Three Parameters of Weibull Distribution[J], SCIREA Journal of Computer, V. 8, Issue 2, 2023, Doi: 10. 54647/ computer520345

[17] 谷耀新，三参数威布尔分布参数估计方法[J],“沈阳工业学院学报”, 1997,V.16(4)]

[18] Efron B and Hastie T[M],计算机时代的统计推断，北京:机械工业出版社,2019

[19] Metropolis, et al, Equation of state calculation by fast computing machines[J], J. Chemical Phys, 1953,21: 1087-1091

[20] 徐晓岭等，恒加试验下 LED 照明灯的三参数 Weibull 分布的参数估计[J]，半导体光电,第 44 卷第 4 期,2023

[21] 张建平等 [J], Weibull 分布下基于 MLE 的红外发光二极管寿命预测[J]. 半导体光电, Vol.32(1): 47-51. 2011

[22] 同济大学数学系编[M],高等数学,第 7 版,北京,高等教育出版社,2014,P115,P118