

色噪声激励下飞行器滚转运动系统的随机 P 分岔控制

马小燕

北方民族大学数学与信息科学学院 宁夏银川

【摘要】为解决无人机在滚转运动中的横向稳定性,本文研究了随机激励下飞行器滚转运动系统的随机分岔控制。首先建立带有分数阶 PID 控制器的色噪声激励的滚转运动系统,借助幅值包络随机平均法计算出 FPK 方程和振幅响应的平稳概率密度函数。其次,根据奇异性理论,推导了带有该控制器时系统发生随机 P 分岔所满足的条件。最后,经过数值验证发现,分数阶 PID 控制器的微分数,积分数及其系数都可以诱导系统发生随机 P 分岔。即该控制器对系统的随机分岔可以进行预期的控制。

【关键词】滚转运动;色噪声;随机平均法;P 分岔;分数阶 PID 控制

【基金项目】北方民族大学研究生创新项目(批准号:YCX23066)

【收稿日期】2024 年 5 月 25 日

【出刊日期】2024 年 6 月 27 日

【DOI】10.12208/j.pstr.20240002

Random P-bifurcation control of vehicle rolling motion system under color noise excitation

Xiaoyan Ma

School of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan, Ningxia

【Abstract】In order to solve the lateral stability of UAV in rolling motion, the random bifurcation control of UAV rolling motion system under random excitation is studied in this paper. Firstly, the rolling motion system with color noise excitation with fractional order PID controller is established, and the stationary probability density function of FPK equation and amplitude response is calculated by means of amplitude envelope random average method. Secondly, according to the singularity theory, the conditions for random P-bifurcation with the controller are derived. Finally, through numerical verification, it is found that the differential number, integral number and coefficient of fractional order PID controller can induce random P-bifurcation. That is, the controller can control the random bifurcation of the system in anticipation.

【Keywords】Rolling movement, Color noise, Stochastic averaging, P-bifurcation, Fractional order PID control

引言

非线性随机动力学一直都是研究的重点,而分岔是其经常出现的一种动力学行为。很多因素都是触发分岔行为的潜在机制,如倾倒^[1-2]、随机跳跃^[3]及冲击。一般根据系统所受激励的不同,分岔可以分为确定性分岔和随机分岔。与确定性分岔相比,随机分岔可以用一个临界参数来描述系统响应从一个状态到另一个状态的定性变化,是一种更为复杂的非线性现象。根据文献随机分岔也可分为 D 分岔与 P 分岔。

为避免系统因分岔现象产生有害的动力学行为或为使系统产生某种有益的分岔行为,则需要对系

统进行分岔控制。控制激励分岔轨道、调整分岔稳定点、优化激励路径是加强激励系统实效性的重要途径^[4]。通常,会设计一个有效的控制器,控制器中包括一些可调参数来修改分岔特性。目前,提出分岔控制的方法主要有镇定不稳定的分岔轨道^[5]、延迟分岔的出现^[6]、重新定位固有分岔的起始点^[7]、改变分岔点对应的系统参数值^[8]等等。

虽然对于分岔控制的研究已经有很多年了,但是大多数研究都集中在确定性的动力系统。对于随机动力系统中的分岔控制研究是相对较少的。因此,下面这些文章是很值得被提及。Ji 等人^[9]为消除单自由度非线性系统在原共振和超谐共振情况下稳态响

应中出现的跳变和迟滞现象,设计了线性与非线性相结合的反馈控制器。徐勇等人^[10]将正交多项式与随机反馈控制器相结合,研究了非线性动力系统的分岔控制问题。随着工业的发展,PID 控制器的出现,保证了实际工业生产安全稳定的运行^[11]。为了更好的提高响应速度和控制精度,Podlubny 等人^[12]提出了一种更加有效的控制工具,即分数阶 PID 控制器。近年来,分数阶 PID 控制器的应用有很多。李志杰等人^[13]提出了离散型分数阶 PID 控制器,用来研究非线性系统。李伟等人^[13-14]将分数阶 PID 控制器推广到带有色噪声的广义范德波系统和求解随机动力系统的 FPK 方程和 BK 方程中。虽然分数阶 PID 控制器的应用很多,但借助分数阶 PID 控制器来研究滚转运动的文献极为少见。

三角翼飞行器在实际飞行中会遇到很多外部环境和内部动因所带来的不确定干扰,这就要求滚转运动在完成各种各样高难度工作时,对它的效率、安全性和可靠性提出了更高的要求,因此研究飞行器滚转运动已经成为当下航空发展的需要。Elzebda^[15]等人比较了自由旋振杆上的细长三角翼翼岩的三种模型,发现仅包含二次项的原始模型并

不能预测滚转散度,对模型加入三次项修正后,不仅可以预测滚转散度,还得到了运动方程的渐进逼近。焦萌倩^[16]等人借助耗散能量平衡法、幅值包络和能量包线随机平均法分别计算了外激和速度参激下的复杂滚转运动模型的平稳概率密度解析解,并数值模拟了 3 种方法的精度。文献[17-18]研究了细长机翼和飞机进行大幅度振动时所产生的动力学影响。刘伟等^[19]分析了静稳定下细长三角翼滚转运动出现 Hopf 分岔的临界条件,并借助耦合三维非常 Navier-Stokes 方程与 Euler 刚体运动方程验证该结论。虽然对滚转运动的研究很多,但研究非高斯噪声激励的文献很少见,因此本文研究加性噪声激励下滚转运动模型的分岔控制。

1 受控的滚转运动系统

由于三角翼飞行器滚转运动系统在运行过程中,会产生震荡现象,因此需要对该系统加入控制器,对系统进行预期控制。本节将设计了一个分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器,谈论该控制器中各参数对随机分岔的控制作用。

色噪声激励下含有分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的三角翼飞行器滚转系统方程如下所示:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha \dot{x} + \beta x^2 \dot{x} + \gamma \dot{x}^2 x + \eta \dot{x}^3 = \varepsilon u(x, \dot{x}) + W(t) \quad (1)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ 与 ω 依然表示三角翼飞行器滚转运动系统的固有系数与固有频率, $W(t)$ 表示均值为零, 相关函数为 $R(h) = \langle W(t)W(t+h) \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{h}{\tau}\right)$ 的色噪声, D 与 τ 表示噪声强度与关联时间。 $\varepsilon u(x, \dot{x}) = \varepsilon k_0 x + \varepsilon k_1 I^\lambda x + \varepsilon k_2 D^\mu x$ 为分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 这里 $I^\lambda x$ 与 $D^\mu x$ 为 Riemann-Liouville 定义^[20]的 λ 阶的分数积分与 μ 阶的分数导数, 两者存在 $D^\mu x = D^\mu I^{n-\mu} x$ 的关系, ε 表示该控制器的系数, 满足 $0 < \varepsilon < 1$ 。

定义 1 实值函数 $x(t)$ 的 Caputo 定义的分数导数如下:

$$D^\mu x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, n-1 < \mu < n \in N \\ x^{(n)}(t), \mu = n \in N. \end{cases}$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, 并且 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ 。

定义 2 实值函数 $x(t)$ 的 λ 阶分数积分被定义为如下:

$$I^\lambda x(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\lambda}} d\tau, \lambda > 0.$$

并且, $D^\mu x(t) = D^{(n)} I^{n-\mu} x(t) = I^{n-\mu} D^{(n)} x(t)$ 。

在定义 1 与定义 2 中令 $n=1, t-\tau=s$, λ 阶的分数积分与 μ 阶的分数导数可以表示如下:

$$\begin{cases} D^\mu x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-s)}{s^\mu} ds, 0 < \mu < 1 \\ I^\lambda x(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t \frac{x(t-s)}{(s)^{1-\lambda}} ds, 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

受弱噪声与轻阻尼的系统 (1) 式将为一个准守恒系统, 则系统阻尼消耗的能量与外部噪声激励产生的能量相当多, 即系统 (1) 式的响应是拟周期的, 因此引入下列 VanderPol 变换:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ \dot{x} = -a\omega \sin \theta \\ \theta = \omega t + \varphi(t). \end{cases}$$

利用 Gamma 函数的定义, $\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\mu-1} dz$ 及其性质 $\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi\mu}$, 分数阶导数可以表达为下二重积分:

$$D^{\mu}x(t) = \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{\sin \pi\mu}{\pi} e^{-z} z^{\mu-1} \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^{\mu}} ds dz.$$

在上式中令 $z = (t-s)y^{\frac{1}{\mu}}$, 并定义函数 $\psi(y, t) = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \int_0^t e^{-(t-s)y^{1/\mu}} \dot{x}(s) ds$ 因此分数阶导数可以进一步转换为带有 $\psi(y, t)$ 的反常积分如下:

$$D^{\mu}x(t) = \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} e^{-(t-s)y^{1/\mu}} \dot{x}(s) ds dy = \int_0^{\infty} \psi(y, t) dy. \quad (2)$$

根据 (2) 式可以得出, $\psi(y, t)$ 满足下列偏微分方程

$$\frac{\partial \psi(y, t)}{\partial t} = -y^{\frac{1}{\mu}} \psi(y, t) + \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \dot{x}(t). \quad (3)$$

上式方程为一线性非齐次常微分方程, 借助常数变易法及 VanderPol 变换求解得出如下:

$$\psi(y, t) = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} a(t) \frac{\omega^2 \cos \theta(t)}{\omega^2 + y^{2/\mu}} - \frac{\sin \pi\mu}{2} a(t) \frac{\omega \sin^2 \theta(t) y^{1/\mu}}{\omega^2 + y^{1/\mu}} + ce^{y^{-1/\mu}}.$$

其中, c 是由初始条件 $\psi(y, 0) = 0$ 得出, 将上式带入 (3) 式得出分数阶控制器中 μ 阶分数阶导数的慢变量表达式如下:

$$D^{\mu}x(t) = a\omega^{\mu} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi\mu}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi\mu}{2} \right), 0 < \mu < 1. \quad (4)$$

根据分数阶微分与分数阶导数之间的关系, 分数阶积分可以表示如下:

$$I^{\lambda}x(t) = a\omega^{-\lambda} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2} \right), 0 < \lambda < 1. \quad (5)$$

将式 (5) 与式 (4) 带入分数阶控制器表达式得:

$$\begin{aligned} u(x, \dot{x}) &= k_0 x + k_1 I^{\lambda} x + k_2 D^{\mu} x \\ &= k_0 a \cos \theta + k_1 \left[a\omega^{-\lambda} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2} \right) \right] \\ &\quad + k_2 \left[a\omega^{\mu} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi\mu}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi\mu}{2} \right) \right] \\ &= \left(k_0 + k_1 \omega^{-\lambda} \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2} + k_2 \omega^{\mu} \cos \frac{\pi\mu}{2} \right) a \cos \theta + \left(k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2} - k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi\mu}{2} \right) a \omega \sin \theta. \end{aligned}$$

为便于计算, 记上式如下:

$$\begin{cases} m(\mu, \lambda) = k_0 + k_1 \omega^{-\lambda} \sin \frac{\pi(1-\lambda)}{2} + k_2 \omega^{\mu} \cos \frac{\pi\mu}{2}, \\ n(\mu, \lambda) = k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2} - k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi\mu}{2}. \end{cases}$$

则分数阶表达式如下:

$$u(x, \dot{x}) = m(\mu, \lambda)a \cos \theta + n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta. \quad (6)$$

根据 VanderPol 变换得出 $a(t) = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}}$ 以及关于 $a(t)$ 与 $\varphi(t)$ 的微分方程如下

$$\begin{cases} \dot{a} = -a\omega \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{\omega} \ddot{x} \sin \theta \\ \dot{\varphi} = -\omega \cos^2 \theta - \frac{1}{\omega a} \ddot{x} \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

将分数阶控制器 (6) 式与 VanderPol 变换带入系统 (1) 式得

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x - \alpha \dot{x} - \beta x^2 \dot{x} - \gamma \dot{x}^2 x - \eta \dot{x}^3 + \varepsilon u(x, \dot{x}) + W(t) \\ &= -\omega^2 a \cos \theta + \alpha a \omega \sin \theta + \beta a^3 \omega \cos^2 \theta \sin \theta - \gamma a^3 \omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \eta a^3 \omega^3 \sin^3 \theta \\ &\quad + \varepsilon m(\mu, \lambda)a \cos \theta + \varepsilon n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta + W(t). \end{aligned} \quad (8)$$

将上式带入 (7) 式得

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\alpha a \sin^2 \theta - \beta a^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \gamma a^3 \omega \sin^3 \theta \cos \theta - \eta a^3 \omega^2 \sin^4 \theta \\ &\quad - \frac{\varepsilon \sin \theta}{\omega} [m(\mu, \lambda)a \cos \theta + n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta] - \frac{1}{\omega} \sin \theta W(t), \\ \dot{\varphi} &= -\alpha \cos \theta \sin \theta - \beta a^2 \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma a^2 \omega \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \eta a^2 \omega^2 \sin^3 \theta \cos \theta \\ &\quad - \frac{\varepsilon \cos \theta}{\omega a} [m(\mu, \lambda)a \cos \theta + n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta] - \frac{1}{\omega a} \cos \theta W(t). \end{aligned}$$

将上式与随机平均法得标准形式 $\frac{d}{dt} x_j(t) = f_j(x, t) + \sum_{l=1}^m g_{jl}(x, t) g_l(t)$, $j=1, 2, \dots, n$. 作比较, 得:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\alpha a \sin^2 \theta - \beta a^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \gamma a^3 \omega \sin^3 \theta \cos \theta - \eta a^3 \omega^2 \sin^4 \theta, \\ f_{12} &= -\frac{\varepsilon \sin \theta}{\omega} [m(\mu, \lambda)a \cos \theta + n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta], \\ f_{21} &= -\alpha \cos \theta \sin \theta - \beta a^2 \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma a^2 \omega \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \eta a^2 \omega^2 \sin^3 \theta \cos \theta, \\ f_{22} &= -\frac{\varepsilon \cos \theta}{\omega a} [m(\mu, \lambda)a \cos \theta + n(\mu, \lambda)a\omega \sin \theta], \\ g_{11} &= -\frac{1}{\omega} \sin \theta W(t), g_{21} = -\frac{1}{\omega a} \cos \theta W(t). \end{aligned} \quad (9)$$

其中, 在 VanderPol 变换中 $a(t)$ 与 $\varphi(t)$ 构成了马尔可夫扩散过程, 则系统 (1) 是以 $2\pi / \omega = T$ 为周期进行准周期运动, 因此对 (9) 式可以在准周期上进行下列时间平均。

$$\langle \square \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \square d\theta.$$

根据随机平均法以及伊藤微分规则得出幅值 $a(t)$ 的伊藤微分方程, 经过幅值包络随机平均法的计算, $a(t)$ 中不含有相位 $\varphi(t)$, 因此 (9) 式中的振幅过程收敛于下利伊藤方程。

$$da = m(a)dt + \sigma(a)dB(t). \quad (10)$$

这里 $B(t)$ 是标准的 Wiener 过程, 且漂移系数 $m(a)$ 与扩散系数 $\sigma(a)$ 可以通过下列随机平均得出

$$\begin{aligned} m_j(X) &= \left\langle f_j(X_t, t) \right\rangle_t + \sum_{l,s=1}^m \sum_{r=1}^n \int_{-\infty}^0 \left\langle g_{rs}(X_{t+\tau}, t+\tau) \frac{\partial}{\partial X_r} g_{jl}(X_t, t) \right\rangle_t R_{ls}(\tau) d\tau, \\ (\sigma\sigma^T)_{jk} &= \sum_{r=1}^n \sigma_{jr}(X) \sigma_{kr}(X) = \sum_{l,s=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle g_{jl}(X_t, t) g_{ks}(X_{t+\tau}, t+\tau) \right\rangle_t R_{ls}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

得漂移系数与扩散系数如下:

$$m(a) = \frac{\varepsilon a}{2} (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi \mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) + \frac{1}{2\omega^2 a} \cdot \frac{D}{1+\omega^2 \tau^2} - \frac{\alpha a}{2} - \frac{\beta a^3}{8} - \frac{3\eta \omega^2 a^3}{8}, \quad \sigma^2(a) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{D}{1+\omega^2 \tau^2}.$$

根据 (10) 式的伊藤微分方程得 da 的表达式不依赖于 θ , 因此可获得系统的 FPK 方程如下

$$\frac{\partial}{\partial t} p(a,t) + \frac{\partial}{\partial a} [m(a)p(a,t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [\sigma^2(a)p(a,t)] = 0.$$

为求解上式中的 FPK 方程, 则需先求出与时间无关的平稳概率密度函数 $p(a)$, 关于 $p(a)$ 满足下列关系:

$$\frac{d}{da} G = \frac{d}{da} \left\{ m(a)p(a,t) - \frac{1}{2} \frac{d}{da} [\sigma^2(a)p(a,t)] \right\} = 0.$$

将上式积分得:

$$G(a) = m(a)p(a,t) - \frac{1}{2} \frac{d}{da} [\sigma^2(a)p(a,t)] = G_c. \quad (11)$$

在上式中, G_c 为常数, 对边界中最常见得情形取它的概率流为零, 则 $p(a)$ 存在, 因此根据已经计算得出的漂移系数, 扩散系以及式 (11) 得

$$\begin{aligned} p(a) &= \frac{c}{\sigma^2(a)} \exp \left[\int \frac{2m(a)}{\sigma^2(a)} da \right] \\ &= \frac{c}{\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{D}{1+\omega^2 \tau^2}} \exp \left[\int \frac{\varepsilon a (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi \mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) + \frac{1}{\omega^2 a} \cdot \frac{D}{1+\omega^2 \tau^2} - \alpha a - \frac{\beta a^3}{4} - \frac{3\eta \omega^2 a^3}{4}}{\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{D}{1+\omega^2 \tau^2}} da \right] \quad (12) \\ &= \frac{c a \omega^2 (1+\omega^2 \tau^2)}{D} \exp \left[\frac{\omega^2 (1+\omega^2 \tau^2)}{D} \left(\frac{\varepsilon a^2}{2} (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi \mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) - \frac{\alpha}{2} a^2 - \frac{\beta a^4}{16} - \frac{3\eta \omega^2 a^4}{16} \right) \right]. \end{aligned}$$

借助 VanderPol 变换, 得出平稳 PDF 与联合 PDF 具有下列关系

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\omega a} p(a), \quad a = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}}.$$

由上式得出关于 x 与 \dot{x} 的联合概率密度函数如下

$$\begin{aligned} p(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2\pi\omega a} p(a) \\ &= \frac{c\omega(1+\omega^2 \tau^2)}{2\pi D} \exp \left[-\frac{\omega^2(1+\omega^2 \tau^2)}{D} \left(\frac{\varepsilon a^2}{2} (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi \mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{2} a^2 - \frac{\beta a^4}{16} - \frac{3\eta \omega^2 a^4}{16} \right) \right] \\ &= \frac{c\omega(1+\omega^2 \tau^2)}{2\pi D} \exp \left[-\frac{\omega^2(1+\omega^2 \tau^2)}{D} \left(\frac{\varepsilon}{2} (x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}) (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi \mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{2} (x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2}) - \frac{\beta}{16} (x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2})^2 - \frac{3\eta \omega^2}{16} (x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2})^2 \right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

2 受控系统的随机分岔

在上一节中, 根据随机平均法, 得到三角翼飞行器滚转运动系统的平稳概率密度函数以及联合概率密度函数, 在这一部分将根据奇异性理论, 计算出系统中分数阶控制器的各参数对随机分岔的控制。

定理 2 根据 (12) 式 $p(a)$ 可表示如下

$$p(a) = cR(a, \omega, \tau, D) \exp[Q(a, \omega, \tau, D, \alpha, \beta, \eta, \mu, \lambda, k_1, k_2)]. \quad (14)$$

其中

$$R(a, \omega, \tau, D) = \frac{a\omega^2(1+\omega^2\tau^2)}{D},$$

$$Q(a, \omega, \tau, D, \alpha, \beta, \eta, \mu, \lambda, k_1, k_2) = \frac{\omega^2(1+\omega^2\tau^2)}{D} \left(\frac{\varepsilon a^2}{2} (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi\mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) - \frac{\alpha}{2} a^2 - \frac{\beta a^4}{16} - \frac{3\eta\omega^2 a^4}{16} \right).$$

由奇异性理论得, 平稳概率密度函数需要满足如下得两个条件

$$\frac{\partial p(a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 p(a)}{\partial a^2} = 0.$$

将 (14) 式带入上式可得出如下条件

$$H = \{R' + RQ' = 0, R'' + 2R'Q' + RQ'' + RQ'^2 = 0\}. \quad (15)$$

其中, H 为平稳 PDF 曲线峰值数目变化的条件。则噪声强度与系统的各参数满足如下的约束条件

$$D = \omega^2(1+\omega^2\tau^2) \left[\alpha a^2 + \frac{\beta a^4}{4} + \frac{3\eta\omega^2 a^4}{4} - \varepsilon a^2 (k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi\mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) \right]. \quad (16)$$

$$2a\varepsilon(k_2 \omega^{\mu-1} \sin \frac{\pi\mu}{2} - k_1 \omega^{-\lambda-1} \cos \frac{\pi(1-\lambda)}{2}) - 2\alpha a - \beta a^3 - 3\eta\omega^2 a^3 = 0. \quad (17)$$

从上式中可得, 该式至多有三个解, 并且解的个数依赖于 $\alpha, \beta, \eta, \mu, \lambda$ 以及 ε 六个数的取值, 如果上式有一个解, 则幅值的平稳概率密度函数为单峰分布。如果有三个解, 则平稳概率密度函数为双峰分布。即随着参数的变化, 就会出现单峰向双峰跃迁的情形, 则发生了随机分岔。下面固定参数值 $k_1 = 0.2, k_2 = 0.56, \beta = -0.3, \eta = 0.15$, 集中讨论分数阶微分数 μ 、积分数 λ 以及分数阶控制器系数 ε 对系统随机分岔的影响。

3 受控系统的数值分析

3.1 受控系统中微分数 μ 对随机 P-分岔的影响

给定参数值 $\lambda = 0.7, \varepsilon = 0.5, \tau = 0.6, \omega = 1, c = 1$, 根据 (16) 式与 (17) 式, 画出分数阶 PID 控制器在 $\mu = 0.4$ 和 $\mu = 0.8$ 时 α 与 D 之间的二分岔图, 如图 1。在图 1 中, 区域 I 与区域 II 表示 $\mu = 0.8$ 时, 平稳概率密度函数具有三个极值, 此时联合概率密度函数呈现双峰。区域 II 与区域 III 表示 $\mu = 0.4$ 时, 平稳概率密度函数具有一个极值, 则联合概率密度函数呈现单峰。在区域 II 中任意取一点 $(\alpha, D) = (0.11, 0.1)$, 在图 2 中分别给出了该点在 $\mu = 0.4$ 与 $\mu = 0.8$ 时系统联合概率密度函数图中峰值的变

化情况。观察图 2 的 (a) 与 (b) 可以得出, 滚转运动系统在加入分数阶 PID 控制器之后, 随着分数阶微分数 μ 的变化, 系统确实发生分岔现象。图 2 的 (a) 是分数阶微分数等于 0.4 时, 带有分数阶控制器的滚转运动系统的联合概率密度图, 由图可知, 此时该图呈现单峰状态。图 2 的 (b) 是分数阶微分数等于 0.8 时, 带有分数阶 PID 控制器的滚转运动系统的联合概率密度图, 观察可知, 此时图呈现双峰状态。即在图 2 中, 随着分数阶微分数的增加, 系统的联合概率密度图由单峰跃迁为双峰, 说明系统的联合概率密度函数出现了随机 P 分岔。

3.2 受控系统中积分数 λ 对随机 P 分岔的影响

为检验分数阶 PID 控制器中积分数 λ 对三角翼滚转运动系统的随机分岔的影响。根据式 (16) 与 (17) 的噪声强度与各参数之间的约束条件, 给定参数值 $\mu = 0.5, \varepsilon = 0.5, \tau = 0.6, \omega = 1, c = 1$ 不变, 在 $\lambda = 0.5$ 与 $\lambda = 0.7$ 时, 画出 α 和噪声强度 D 的二分岔图, 如图 3 所示。在图 3 中, 区域 I 与区域 II 表示积分数 $\lambda = 0.5$ 时, 系统的联合概率密度函数具有三个极值且概率密度图呈现双峰状态。区域 II 与区域 III 为积分数 $\lambda = 0.7$ 时, 系统的平稳概率密度

函数具有一个极值，此时图像呈现单峰状态。

任意在图 3 的区域 II 中选取一点 $(\alpha, D) = (0.1, 0.16)$ 验证上面结论，图 4 中的 (a) 与 (b) 分别给出了这一点在分数阶 PID 控制器的积分数 $\lambda = 0.5$ 与 $\lambda = 0.7$ 时，系统的平稳联合概率密度函数图。

根据下列图 4 中的 (a) 与 (b) 可知， $\lambda = 0.5$ 时，受控系统的联合概率密度函数图呈现双峰状态。当分数阶积分数 $\lambda = 0.7$ 时，系统的联合概率密度函数图呈现单峰状态。即图 4 的 (a) 与 (b) 图说明了分数阶积分数 λ 的变化会引起受控系统的性质发生变化，随着分数阶积分数 λ 的增加，系统的联合概率密度函数图会由双峰跃迁为单峰。因此，分数阶积分数 λ 可以诱导系统发生随机 P 分岔。

3.3 分数阶控制器系数 ε 对随机 P-分岔的影响

在上面两部分中探究了分数阶 PID 控制器中的微分数 μ 与积分数 λ 对系统随机 P 分岔的影响。接下来，主要探究该控制器的参数 ε 对随机 P 分岔的影响。与上两部分类似，固定参数值：

$\mu = 0.5, \lambda = 0.6, \tau = 0.6, \omega = 1, c = 1$ ，根据式 (16) 与 (17) 的噪声强度与各参数之间的约束条件，画出 ε 在 0.4 与 0.6 时 α 与 D 之间的二分岔图，如图 5 所示。在图中，区域 I 与区域 II 表示 $\varepsilon = 0.4$ 时，平稳概率密度函数具有一个极值且此时图像呈现单峰分布。区域 II 与区域 III 表示 $\varepsilon = 0.6$ 时，平稳概率密度函数具有三个极值且图像呈现双峰状态。

类似于上两节，为验证上面结论，在图 5 的区域 II 中选取一点 $(\alpha, D) = (0.11, 0.2)$ 。根据联合概率密度函数，在图 6 中画出受控系统在 $\varepsilon = 0.4$ 与 $\varepsilon = 0.6$ 时的联合概率密度函数图，其中图 6 (a) 为 $\varepsilon = 0.4$ 时，受控系统的联合概率密度函数图，观察可知此时图像呈现单峰分布。图 6 (b) 为 $\varepsilon = 0.6$ 时，受控系统的联合概率密度函数图，观察可知此时图像呈现双峰分布。

因此，随着分数阶 PID 控制器参数 ε 的增加，系统的联合概率密度图由单峰变为双峰，这表明分数阶 PID 控制器参数 ε 的变化可以诱导随机 P 分岔的发生。

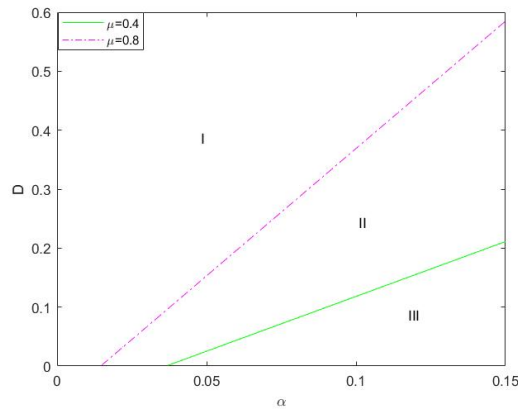


图 1 $\mu = 0.4$ 与 $\mu = 0.8$ 时受控系统在平面 (α, D) 内的二分岔图

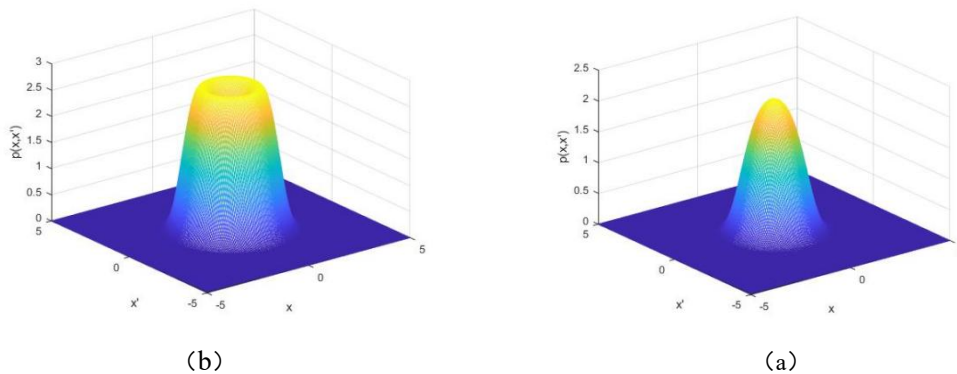


图 2 受控系统式 (18) 的联合概率密度图 ((a) $\mu = 0.4$, (b) $\mu = 0.8$)

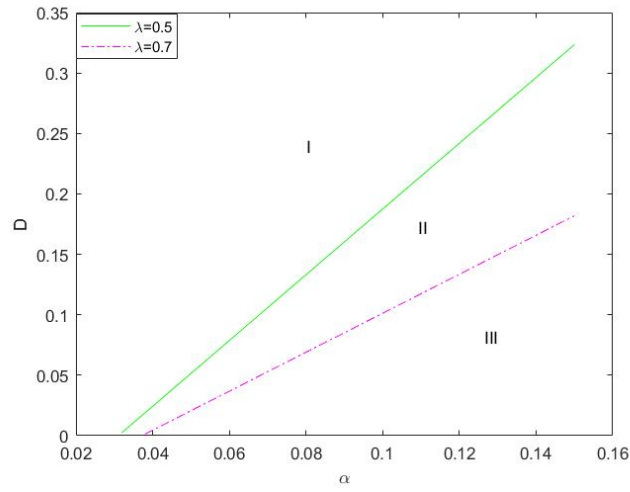
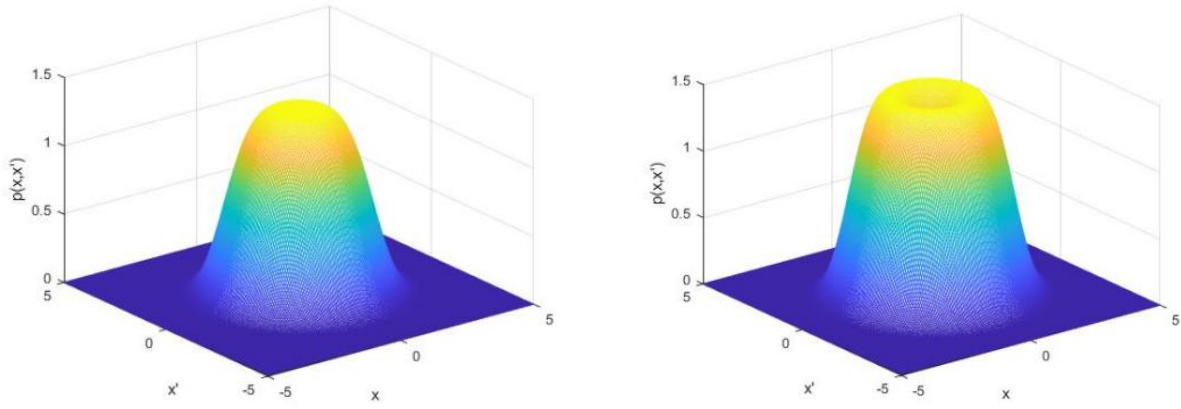


图3 $\lambda = 0.5$ 与 $\lambda = 0.7$ 时受控系统在平面 (α, D) 内的二分岔图



(a)

(b)

图4 受控系统式 (18) 的联合概率密度图 ((a) $\lambda = 0.5$, (b) $\lambda = 0.7$)

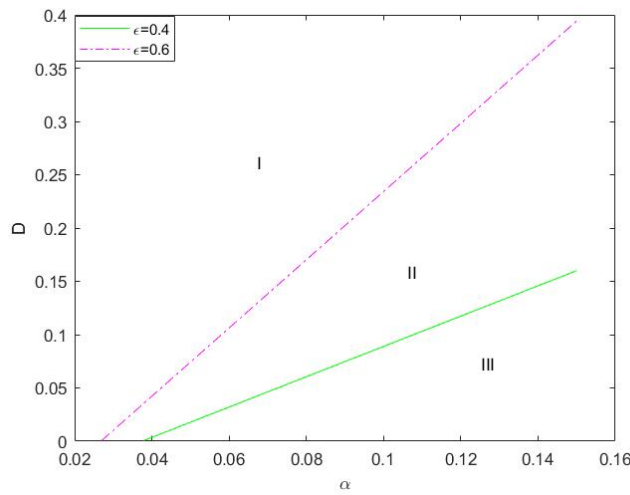


图5 $\epsilon = 0.4$ 与 $\epsilon = 0.6$ 时受控系统在平面 (α, D) 内的二分岔图

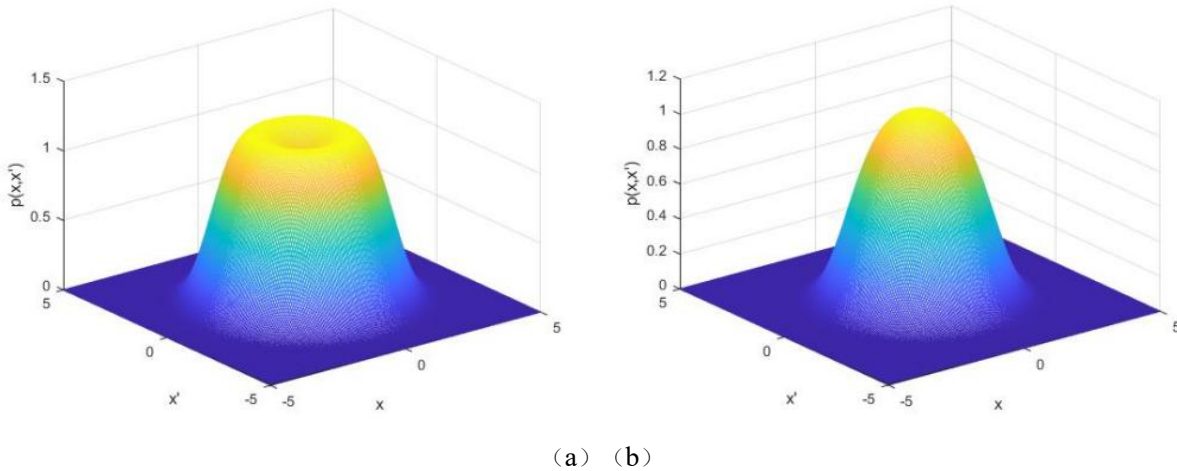


图 6 受控系统式 (18) 的联合概率密度图 ((a) $\varepsilon = 0.4$, (b) $\varepsilon = 0.6$)

根据以上对分数阶 PID 控制器的微分数 μ , 积分分数 λ 及其系数 ε 的研究, 可以得出分数阶 PID 控制器在系统中确实可以有效地实现随机 P 分岔控制。在研究中发现, 随着分数阶微分 μ 和分数阶 PID 控制器系数 ε 的不断增大, 系统平稳联合概率密度函数由单峰跃迁为双峰, 导致随机 P 分岔的发生。而分数阶积分 λ , 对系统也会起到控制的作用, 即随着它的值的增加, 联合概率密度函数图会由双峰变为单峰。

因此, 微积分 μ , 积分 λ 以及系数 ε 可以作为分岔参数, 诱导系统发生随机 P 分岔, 使系统的平稳联合概率密度函数在状态空间中发生跃迁, 即分数阶 PID 控制器可以对随机系统的随机分岔进行预期的控制。

4 结论

根据实际生活的需要, 本文在三角翼飞行器滚转运动系统中引入色噪声激励, 对该系统进行 P 分岔控制。由于分数阶 PID 控制器比常规 PID 控制器多了两个参数, 在控制的灵活性和准确性中都会有较大的改善。

所以, 本文引用分数阶 PID 控制器对系统进行控制。首先根据随机平均法计算出系统相应的平稳概率密度函数。再借助奇异性分析理论, 得出受控系统发生随机分岔时所满足的条件。最后, 经理论分析及数值验证发现, 分数阶微分 μ 、分数阶积分 λ 和控制器系数 ε 的变化都可以使系统发生随机 P 分岔。

参考文献

- [1] Ma J, Xu Y, Li Y, et al. Quantifying the parameter dependent basin of the unsafe regime of asymmetric Lévy-noise-induced critical transitions[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(1): 65-84.
- [2] Zhang X Y, Xu Y, Liu Q, et al. Rate-dependent tipping-delay phenomenon in a thermoacoustic system with colored noise[J]. Science China Technological Sciences, 2020, 63(11): 2315-2327.
- [3] Liu Q, Xu Y, Kurths J. Bistability and stochastic jumps in an airfoil system with viscoelastic material property and random fluctuations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 84: 105184.
- [4] Kramer M A, Lopour B A, Kirsch H E, et al. Bifurcation control of a seizing human cortex[J]. Physical Review E, 2006, 73(4): 041928.
- [5] Tesi A, Abed E H, Genesio R, et al. Harmonic balance analysis of period-doubling bifurcations with implications for control of nonlinear dynamics[J]. Automatica, 1996, 32(9): 1255-1271.
- [6] Ji J C, Leung A Y T. Bifurcation control of a parametrically excited Duffing system[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 27(4): 411-417.
- [7] Laufenberg M J, Pai M A, Padiyar K R. Hopf bifurcation control in power systems with static var compensators[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems,

- 1997, 19(5): 339-347.
- [8] Ji J C. Local bifurcation control of a forced single-degree-of-freedom nonlinear system: saddle-node bifurcation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 25(4): 369-382.
- [9] Vasegh N, Sedigh A K. Delayed feedback control of time-delayed chaotic systems: Analytical approach at Hopf bifurcation[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(31): 5110-5114.
- [10] 刘冰琪,解初,刘鹏. PID 控制器最优参数整定方法的研究[J]. *科技风*,2022,(19):1-3.
- [11] Xie Y, Chen L, Kang Y M, et al. Controlling the onset of Hopf bifurcation in the Hodgkin-Huxley model[J]. *Physical Review E*, 2008, 77(6): 061921.
- [12] Xu Y, Ma S, Zhang H. Hopf bifurcation control for stochastic dynamical system with nonlinear random feedback method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65: 77-84.9.
- [13] Podlubny I. Fractional-order systems and π -controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208-214.
- [14] Z, Ding J, Wu M, et al. Discrete fractional order PID controller design for nonlinear systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52(15): 3206-3213.
- [15] Elzebda J M, Nayfeh A H, Mook D T. Development of an analytical model of wing rock for slender delta wings[J]. *Journal of Aircraft*, 1989, 26(8): 737-743.
- [16] 焦萌倩,彭如月,黄文韬,蒋贵荣. 外激和参激作用下的三角翼飞行器滚转运动的随机响应[J]. *广西师范大学学报(自然科学版)*,2020,38(05):34-41.
- [17] Nelson R C, Pelletier A. The unsteady aerodynamics of slender wings and aircraft undergoing large amplitude maneuvers[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2003, 39(2-3): 185-248.
- [18] 杨文,卜忱,睦建军. 某复杂构型飞机偏航-滚转耦合运动非定常气动力特性实验研究[J]. *实验流体力学*,2016,30(03):61-65.
- [19] 刘伟,张涵信. 机翼自由滚转运动的 Hopf 分岔及数值模拟[C]//全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会论文. 北京:中国力学学会,2006:110-115.
- [20] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. Wiley, 1993.

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS