2024 年第 6 卷第 4 期
https://aam.oajrc.org/

函数极限的几类常见求解方法探析

郝 悦[1]，杨爱利[2]

[1] 扬州大学 江苏扬州
[2] 海南师范大学 海南海口

【摘要】函数极限计算是高等数学教学中的一类重要问题，是函数微积分学研究的基础，理解并灵活运用极限的各种计算方法对学好高等数学至关重要。由于极限类型和求解方法的多样性，很多学生无法很好地掌握每种方法的适用条件和使用技巧，导致做题时无从下手。如何帮助学生掌握函数极限，特别是未定式极限的求解方法是高等数学教学中的重点和难点。针对该问题，由于大部分未定式极限题都可通过转化为$\frac{0}{0}$型求解，故本文以一道$\frac{0}{0}$型未定式极限题为例，总结并详细分析了几类求解函数极限的常见方法及其适用条件和关键步骤，以此帮助学生熟练掌握极限计算方法，并培养学生的发散思维能力。

【关键词】函数极限；求解方法；高等数学

【基金项目】海南省高等学校教育教学改革研究项目（Hnjgzc2023-8）

【收稿日期】2024 年 10 月 18 日　　**【出刊日期】**2024 年 12 月 5 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20240047

Study on some common methods for function limit

Yue Hao[1], Aili Yang[2]

[1]Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu
[2]Hainan Normal University, Haikou, Hainan

【Abstract】Function limit calculation is an important problem in advanced mathematics teaching and the basis of function calculus research. Understanding and flexibly applying various limit calculation methods is crucial to learning advanced mathematics. Due to the diversity of limit types and solution methods, many students cannot master the applicable conditions and usage skills of each method well, resulting in a lack of knowledge when doing questions. How to help students master function limits, especially the solution methods of indeterminate limits, is the key and difficulty in advanced mathematics teaching. In response to this problem, since most indeterminate limit problems can be solved by converting them into $\frac{0}{0}$ type, this paper takes a $\frac{0}{0}$ type indeterminate limit problem as an example, summarizes and analyzes in detail several common methods for solving function limits and their applicable conditions and key steps, so as to help students master limit calculation methods and cultivate students' divergent thinking ability.

【Keywords】Function limit; Solution method; Advanced mathematics

极限计算是高等数学学习中的一个重点和难点，是研究函数连续性、微分和积分等理论的一个基本工具。因此，正确掌握极限的概念和计算方法十分重要。函数极限问题的类型和求解方法灵活多变，主要包括$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型、$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型和1^{∞}型等未定式极限类型，其中，0，∞，1分别代表极限为该数值的函数[1-5]。考虑到后几种极限问题主要是通过将其转化为$\frac{0}{0}$型问题进行计算，因此本文以一道$\frac{0}{0}$型极限题为例，总结了几类常见的求解方法，并分析了它们的使用技巧和注意事项，从而帮助学生更好地了解和掌握这些求解方法。

例 1：求解$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\sqrt{\cos}-1}$。

1 约去无穷小公因式法

约去无穷小公因式法的关键在于寻找分子分母的无穷小公因式，从而化简极限表达式，常与其它极限求解方法结合使用。例 1 中，考虑到：

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$$
$$= (1+\cos x)(1+\sqrt{\cos x})(1-\sqrt{\cos x})$$

即分子和分母具有无穷小公因式$\sqrt{\cos x}-1$，因此有：

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1+\cos x)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}$$
$$= -2。$$

注：在使用约去无穷小公因式方法求解极限问题时，需要注意以下两个方面。

（1）适用对象：分子、分母均为自变量变化过程中的无穷小，且含有相同的无穷小因式。需注意，使用该方法时，需确保约去无穷小公因式后，极限存在且结果不受影响。

（2）关键步骤：首先，观察表达式，判断分子和分母是否具有无穷小公因式，常见策略有因式分解、分子分母有理化等方法。若有，则约去分子、分母中的无穷小公因式，将原极限表达式化简。最后，结合极限的其它计算方法对化简后的表达式进行求解。

2 利用两个重要极限

两个重要极限是求解极限问题的一种常用方法，主要用于处理三角函数或反三角函数相关的$\frac{0}{0}$型未定式极限、$f(x)^{g(x)}$为1^∞型未定式极限。该方法的关键在于将极限表达式经过合适的变形，凑成两个重要极限公式中的固定形式，其中变量x可以换成自变量变化过程中的无穷小量$\varphi(x)$，即$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$和$\lim\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$。

例 1 中，注意到极限表达式是含有正弦和余弦函数的$\frac{0}{0}$型未定式，故尝试通过变形将其凑成$\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$（$\varphi(x)\to 0$）的形式。

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}{(\cos x-1)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}\right)$$
$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}$$
$$= -2\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$
$$= -2。$$

注：在使用两个重要极限时，需要注意以下两个方面。

（1）适用对象：第一个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$适用于分子和分母中含有自变量的三角函数或反三角函数的$\frac{0}{0}$型未定式极限。第二个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$常用于求解形如$\lim f（x）^{g（x）}$的$1^{\infty}$型未定式的极限。

（2）关键步骤：利用两个重要极限时，最重要的在于凑，通过各类变换，将函数表达式改写成两个重要极限中的固定格式。

3 等价无穷小替换法

等价无穷小替换方法是处理$\frac{0}{0}$型未定式极限问题时非常有效的工具，其核心在于识别并利用合适的等价无穷小关系，将复杂的函数表达式简化为更易于处理的形式，一定程度上简化计算量。在使用该方法时，需要注意其适用条件，尤其在进行加减运算时，各项无穷小的等价性必须得到满足，如定理 2 所述。

定理 1[1-3]：设α和β是自变量同一变化过程中的无穷小量，若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则：

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$。

定理 2：设α，β，γ是自变量同一变化过程中的无穷小量，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则：

(1) 当α和β不等价，且$\lim\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$极限存在时，有：

$\lim\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\lim\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma}$;

(2) 当α和β等价时，上述结论不一定成立。

定理 2 表明，在计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}$时，不能通过分别对$\tan x$和$\sin x$进行等价无穷小替换$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，得到答案为 0，这是错误的，而是应该将分子改写成因式相乘的形式，再进行分别替换：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\times\frac{1}{2}x^2}{x}=0。$$

此外，当分子为$\tan 3x-\sin x$时，因为$\tan 3x\sim 3x$，$\sin x\sim x$，两者不是等价无穷小，故根据定理 2 的结论（1），分子中的两项可分别进行等价无穷小替换，即$\tan 3x-\sin x\sim 3x-x$，从而得到极限为2。

例 1 中，因为当$x\to 0$时，有$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，故由定理 1 可得：

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\sqrt{1+(\cos x-1)}-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{\frac{1}{2}（\cos x-1）}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}\\&=-2。\end{aligned}$$

注：在使用等价无穷小替换时，需要注意：

（1）适用对象：包含无穷小量的未定式极限求解，且分子与分母的无穷小因子符合定理 1 和定理 2 中的等价无穷小替换条件。

（2）关键步骤：在利用等价无穷小替换方法时，首先要观察并判断可以进行等价无穷小替换的部分。为此要熟记常见的等价无穷小，以及等价无穷小替换的条件，即求极限的乘除运算中可以使用等价无穷小替换，在加减运算中需注意定理 2 中的条件。然后，通过等价无穷小替换，简化极限求解，并计算极限值。

4 洛必达法则

定理 3（洛必达法则）[1-3]：设

1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$（或$\infty$），$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$（或$\infty$）；

2） $f(x)$和$g(x)$在x_0的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$；

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，

则有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

洛必达法则是微分学中的一个重要定理，常用于求解$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限。在计算过程中，如果使用洛必达法则后的结果仍是未定式且满足定理 3 中的条件，则可连续多次使用洛必达法则。需要注意，当使用洛必达法则无法计算出极限时，并不代表该函数极限不存在，此时应尝试其它求解方法。

例 1 中，注意到分子、分母是$x\to 0$时的无穷小，且满足定理 3 中的条件 2）和 3），因此有：

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)'}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\sin x\cos x}{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\\
&=-2。
\end{aligned}
$$

注：在使用洛必达法则时，需注意以下两个方面：

（1）适用对象：$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限，分子、分母在既定区域内可导，且极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在。需要注意的是，不满足洛必达法则条件的函数极限不一定不存在，此时应改用其它求解方法。

（2）关键步骤：首先判断极限表达式中的分子分母是否为无穷小（或无穷大），以及其导数在既定区域是否可导。如果这两个条件都存在，则求导并判断求导后的极限是否存在：如果存在，直接得到答案。如果不存在，说明该极限不能利用洛必达法则计算。如果不确定，则可根据定理 3 判断是否可继续使用洛必达法则。

5 泰勒展开式法

泰勒展开式法是处理未定式极限的强大工具，它利用函数的多项式逼近性质，将极限表达式中多种类型的函数统一转化为多项式函数，从而将原极限计算转化为有理多项式极限的计算。

例 1 中，函数$f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}-1$和函数$g(x)=\sqrt{\cos x}-1$在区间$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上均具有无穷阶导数，故根据泰勒公式，其可以写成如下多项式的形式：

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)，\ g(x)=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)，$$

因此有：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}=-2。$$

注：在利用泰勒展开式求极限时，需要注意：

（1）适用对象：适用于$\frac{0}{0}$型极限求解，其中分子和分母中的函数在展开点附近充分可导，且展开点是函数的收敛点。特别地，当利用洛必达法则求解较为复杂且无法使用等价无穷小替换时，可尝试利用泰勒公式求解。

（2）关键步骤：判断函数在给定区域内是否可以展开为泰勒多项式且具体能展开到第几项。若可以展开，则选择合适的展开阶数，将原函数中的不同函数进行展开整理化简。最后对化简后的极限进行计算。需强调的是，泰勒展开式阶数的选取一般遵循分式“上下同阶”原则和加减“最小幂次”原则。

在本文中，考虑$\frac{\infty}{\infty}$型、$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型等未定式极限常通过转换为$\frac{0}{0}$型未定式极限进行计算，故以一道$\frac{0}{0}$型未定式极限为例，详细分析了高等数学中五类常用的极限求解方法，并总结了它们的适用对象，使用技巧以及关键步骤，为学生求解未定式函数极限提供了一定的参考。这些方法中，每个方法都有各自的使用条件、优势和限制，需要学生能够理解并掌握这些基本的求解方法，然后根据题目特点灵活地选择方法，从而简便快速地解决问题。

参考文献

[1] 刘金林, 蒋国强, 等. 高等数学[M]. 机械工业出版社, 2024.
[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
[4] 曲亚男. 求解函数极限的若干方法[J]. 中国科技信息, 2005, (19):26-27.
[5] 王亮. 函数极限的求法、技巧与应用例析[J]. 河南科技, 2013, (24):186-187+192.