大偶数可以表示为两个奇素数之和形式的证明

王伟民

安徽省太和县宫集镇中心学校　安徽阜阳

【摘要】对哥德巴赫猜想的正确性进行探究，用中等数学知识，采取数学归纳法、反证法等基本的数学推理方法，并结合图形面积的方式，探究哥德巴赫猜想的正确性。引入大偶数能表示成的两奇质数之和数目的近似公式，对近似公式的数值进行定量分析，对大偶数实际能表示成的两奇质数之和的数目，与由近似公式算出的理论值间的误差进行定量分析，从而得出"哥德巴赫猜想是正确的"这一结论。

【关键词】质数；偶数；理论值；误差

【收稿日期】2025年2月15日　【出刊日期】2025年3月31日　【DOI】10.12208/j.sdr.20250031

A proof that even numbers can be expressed in the form of the sum of two odd prime numbers

Weimin Wang

Taihe county, Gongji Center School, Fuyang, Anhui

【**Abstract**】The Goldbach conjecture is correct to explore. ln secondary mathematics knowledge, take mathematics inductive method, reduction to absurdity and other basic mathematical reasoning methods, combined with the graphics area, exploring Goldbach conjecture is correct. Greater even number can be expressed as introducing two odd prime number and the approximate formula, the approximate formula for the function value of quantitative analysis of actual, even can be represented as two odd prime number and number, and the approximate formula to calculate the theoretical value of the error between the quantitative analysis, thus obtains" the Goldbach conjecture is right" this conclusion.

【**Keywords**】Prime number; Even numbers; Theoretical value; Errorr

引言

两百多年前，德国数学家哥德巴赫提出如下命题：任何一个大于 4 的偶数都可以表示成两奇质数之和的形式，简称为"1+1"，即，一个质数加一个质数。例如：6=3+3，8=3+5，10=3+7=5+5，……偶数的个数有无穷多，我们不可能把所有的偶数全部列举出来，逐一验证，必须找到一种证明的方法，来说明此命题的正确性，或者举出一个反例来推翻它.但是，到目前为止，人们既没能举出相反的例子，也没有找到证明它正确的方法来.所以，上述命题仍然是一种猜想——"哥德巴赫猜想"（注：我国已故著名数学家陈景润在上世纪六十年代成功证明了命题"1+2"——任何一个大于 4 的偶数，都可以表示成"一个素数与另一个素因子不超过 2 个的乘积之和"[8]的形式）。本文用中等数学知识，对哥德巴赫猜想的正确性进行探究。

1 近似公式的引入

把质数按照从小到大的顺序排列起来，称为质数数列（以后，我们用字母 q_i 来表示质数）。把自然数按照从小到大顺序排列起来，称为自然数列。

引理 1：在自然数列中，如果依次将质数数列 q_1、q_2……q_n……中前 n 个质数的所有整数倍全部划去，那么，小于 q_{n+1}^2 的自然数将全部是质数[1].（为了研究问题的方便，我们暂把划去质数的所有整数倍之后，自然数列中剩余的第一个数"1"看作质数，并用 $q_0=1$ 来表示）。

证明（用反证法）：假设 q_1、q_2……q_n 的所有整数倍划去之后，自然数列中小于 q_{n+1}^2 的数还有合

作者简介：王伟民（1964-）男，本科，中教高级。

数 p，那么，p 一定可以分解质因数 $p=q_A^{nA}q_B^{nB}q_C^{nC}\cdots\cdots$，这些质因数中一定不含前 n 个质数，（否则，p 将被划去），它们只能是大于 q_n 的质数，这就有 $p=q_A^{nA}q_B^{nB}q_C^{nC}\cdots\cdots\geq q_{n+1}^2$，这与合数 p 小于 q_{n+1}^2 相矛盾，所以，自然数列中，小于 q_{n+1}^2 的数应全为质数。比如，我们将 2、3、5、7 这四个质数的所有整数倍全部划去之后，自然数列中所剩的小于 11^2 的数将全部是质数。因此，对与某一大偶数 $2a$，要使自然数列中小于它的数不存在合数，只要将小于 $\sqrt{2a}$ 的质数（不包括 $q_0=1$）的整数倍全部划去即可[2]（以后，凡遇到划去质数的整数倍时，均不包括 $q_0=1$，否则，自然数将全部被划去）。

下面研究一下大偶数 $2a$ 所能表示成的两奇质数之和的数目的近似公式。

若将“1+1”改为：任何一个大于 4 的偶数都可以表示成两自然数之和的形式，此命题无疑是正确的，而且，任何一个大偶数 $2a$ 都可以写成 a 对不同的自然数之和：

$$\begin{aligned}2a&=1+(2a-1)\\&=2+(2a-2)\\&\cdots\cdots\\&=a+a\end{aligned}$$

我们不妨用 $F_0=a$ 来表示：

那么，当小于 $\sqrt{2a}$ 的所有质数的整数倍全部划去时，F_0 将如何变化呢?

对于大偶数 $2a$，假设小于 $\sqrt{2a}$ 的质数除 $q_0=1$ 外还有 n 个：q_1、$q_2\cdots\cdots q_n$。我们先看其中某一个质数 q_i 的整数倍划去时，$2a$ 所能表示成的两自然数之和的数目的变化其情况[3]。

1.1 若：$q_i=q_1=2$

如果 $2|a$，当 2 的倍数单独划去时（注：“2 的倍数”含“2 的 1 倍”，即 2 本身。以后，凡是遇到“划去质数 q_i 的整数倍”时，均含 q_i 的 1 倍，即 q_i 本身），$F_0=a$ 将改写成 $F_1=a(1-\frac{1}{2})$。

如果 $2\nmid a$，当 2 的倍数单独划去时，$F_0=a$ 将改写成

$$F_1=(a-1)(1-\frac{1}{2})\approx a(1-\frac{1}{2})$$

1.2 若 $q_i|2a$，且 $q_i>2$，则 $q_i|a$

所以，当 q_i 的整数倍全部划去时，$F_0=a$ 将改写成：

$$F_1=a(1-\frac{1}{q_i})$$

1.3 若 $q_i\nmid 2a$ 则 $q_i\nmid a$

当 q_i 的整数倍全部划去时，等式 $F_0=a$ 将改写成

$F_1=a-[\frac{2a}{q_i}]$（注：$[\frac{2a}{q_i}]$ 表示 $\frac{2a}{q_i}$ 的整数部分）

$$F_1=a-[\frac{2a}{q_i}]\approx a-\frac{2a}{q_i}=a(1-\frac{2}{q_i})$$

综合上面三种情况，我们得出结论：当小于 $\sqrt{2a}$ 的 n 个质数 q_1、$q_2\cdots\cdots q_n$ 的所有整数倍（含“1”倍，即包括这些质数本身）全部划去时，大偶数 $2a$ 所能表示成的两自然数（现在可以改为“奇质数”了）之和的数目约为：

$$f_n=a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1,2}{q_2})(1-\frac{1,2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{1,2}{q_n})\quad(1)$$

1.4 几点说明

1.4.1“奇质数”里面包括自然数“1”，但不包括小于 $\sqrt{2a}$ 的质数，这只是为了研究问题的方便，后面我们还要单独讨论。

1.4.2 $(1-\frac{1,2}{q_i})$ 表示 $(1-\frac{1}{q_i})$ 或 $(1-\frac{2}{q_i})$，当 $q_i|a$ 时，用 $(1-\frac{1}{q_i})$ 当 $q_i\nmid a$ 时，用 $(1-\frac{2}{q_i})$

例如：对于偶数 $2a=200$ 来讲，小于 $\sqrt{200}$ 的质数有 2，3，5，7，11，13 这六个.其中 2 和 5 都能整除 100，其余四个都不能整除 100.因此，当这些质数的整数倍分别全部划去后，偶数 200 所能表示的两“奇质数”之和的数目约为：

$$f_6=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{2}{7})(1-\frac{2}{11})(1-\frac{2}{13})$$

1.4.3 公式的左边用 f_i 表示近似值.我们把该公式称为近似公式.当用到准确值时，我们仍用 F_i 来表示。

1.4.4 公式中 $q_1=2,q_2=3,q_3=5\cdots\cdots$

1.4.5 实验表明，由近似公式算出的数值与准确

值的接近程度非常好。（关于误差分析，后面我们还要单独讨论。）

1.4.6 符号 f_n 表示 n 个质数的整数倍被划去后的近似值.

2 近似公式的定量研究

本小节我们研究 f_n 如何随 a 的变化而变化。

我们先看一种特殊情况：

$$f_n^/ = a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n}) \quad (2)$$

此公式表示，除了 $q_1=2$ 能整除 $2a$，其余质数 q_2、q_3、…… q_n 都不能整除 $2a$。这种情况也是存在的，2 的整数次幂都是这样的偶数，比如 $2a=2^6=64$，$\sqrt{64}=8$，小于 8 的质数，除 2 之外，3、5、7 都不能整除 2^6。

下面对偶数进行分段：质数按照从小到大的顺序排列 q_1、q_2…… q_n……，我们把自然数列中介于 q_i^2 与 q_{i+1}^2 之间的偶数叫做同一段内的偶数[4]。

在自然数列中，依次将 q_1、q_2…… q_n 的整数倍分别划去.当 q_{n-1} 及其比它小的质数的整数倍全部划去后（这只能保证小于 q_n^2 的自然数全为质数），若再划去 q_n 的整数倍，可使 q_n^2——q_{n+1}^2 之间全为质数.在这之后，若再划去 q_{n+1} 的整数倍，又可使 q_{n+1}^2 与 q_{n+2}^2 之间全为质数.即，往后，每多划去一个质数的整数倍，自然数列中，就多出一段不含合数的数段[5]。

现在，对于大偶数 $2a$，我们不论 q_i 是不是 $2a$ 的约数，都以公式：

$$f_n^/ = a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n}) \quad (2)$$

来研究。[这也是为了研究问题的方便，目的是通过公式（2）数值的变化情况，来探究公式（1）的数值变化情形]

2.1 同一段内的两个偶数 $2a_1$ 和 $2a_2$，设 $q_n^2<2a_1<2a_2<q_{n+1}^2$，则当 q_n 及其比它小的质数的整数全部划去时，比偶数 $2a_1$ 小的数（当然也比 $2a_2$ 小）均为质数。这时有：

$$f_{n1}^/ = a_1(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n})$$

$$f_{n2}^/ = a_2(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n})$$

$$\because 2a_1<2a_2$$

$$\therefore f_{n1}^/<f_{n2}^/$$

结论：同一段内的两个偶数.其理论值 $f_n^/$ [我们把由公式（1）或（2）算出的数值叫做这一偶数 $2a$ 的理论值] 随着偶数的增大而增大[6]。

2.2 研究各段内第一个偶数的理论值

若 $2a$ 是第 n 段的第一个偶数.即 $2a=q_n^2+1$

则：

$$f_n^/ = \frac{q_n^2+1}{2}(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n})$$

$$=\frac{q_n^2+1}{2}(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{q_2-2}{q_2}\cdot\frac{q_3-2}{q_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{q_n-2}{q_n}$$

$$\geqslant\frac{q_n^2+1}{4}\cdot\frac{1}{q_n}$$

$$=\frac{q_n}{4}+\frac{1}{4q_n}$$

$$\therefore\ f_n^/>\frac{q_n}{4} \quad (3)$$

引理 2：在质数数列中总存在质数 q_i，$q_n\geqslant q_i$ 时，$f_n^/>n+2$ 成立。

下面对这个引理加以证明。

观察质数表发现：当 $n=40$ 时 $q_{40}=173$.由公式（3）得：

$$f_{40}^/>\frac{173}{4}=43.25>43=40+3$$

即当 $n=40$ 时，不等式 $f_n^/>n+2$ 成立

那么当 $n>40$ 时，此不等式是否还能成立？

可以设想：如果大于 173 的质数中，相邻两质数的差的绝对值都不小于 4，此不等式必定成立.证明如下：

假设当 $n=k$ 时，$\frac{q_k}{4}>k+2$，即 $n=k$ 时 $f_k^/>k+2$

当 $n=k+1$ 时，由上面的设想可知 $q_{k+1}-q_k\geqslant4$

$$\therefore f_{k+1}^{/} > \frac{q_{k+1}}{4} \geqslant \frac{q_k+4}{4} = \frac{q_k}{4}+1 > k+2+1$$

即，当$n=k+1$时，不等式成立.（证毕）

但是，质数数列中，大于 173 的质数，并不像我们设想的那样。比如179与181， 191与193……，它们的差都小于 4。所以，我们不得不探究一下质数分布的间隔规律。

自然数列中，依次将 2、3、5、7 这四个质数的所有整数倍全部划去（包括这四个质数），我们把剩下的自然数看作“质数”。显然，这些“质数”的间隔规律是周期性变化的。即每隔 2×3×5×7=210 为一个排列周期，其中第一周期中的“质数”为：

1	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83
89	97	101	103	107	109	113	121	127	131
137	139	143	149	151	157	163	167	169	173
179	181	187	191	193	197	199	209		

注：（其中下面划“_”的“质数”不是质数）

相邻两“质数”差的绝对值依次是：[对数据进行下面的两步处理，目的是为了研究当i连续发生变化时，$q_i/4-i$的变化情况.举个例子，按上述方法得出的“质数”数列中，若第i个质数q_i满足$q_i/4-i=M$，假如从该质数开始，往后“质数”的间隔情况是从下面数据的第二个开始的：2 4 2 4 6 2……，那么就应有：$q_{i+1}/4-(i+1)=M+(-0.5)$、$q_{i+2}/4-(i+2)=M+(-0.5)+0$、$q_{i+3}/4-(i+3)=M+(-0.5)+0+(-0.5)$、……]：

10	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	4
2	6	4	6	8	4	2	4	2	4	8	6	4	6	2	4
6	2	6	6	4	2	4	6	2	6	4	2	4	2	10	

将这 47 个数都减去 4，减得的差再除以 4 得：

1.5	-0.5	0	-0.5	0	0.5	-0.5	0.5	0	-0.5
0	0.5	0.5	-0.5	0.5	0	-0.5	0.5	0	0.5
1	0	-0.5	0	-0.5	0	1	0.5	0	0.5
-0.5	0	0.5	-0.5	0.5	0.5	0	-0.5	0	0.5
-0.5	0.5	0	-0.5	0	-0.5	1.5	-0.5 丨 1.5	-0.5	0

……

（竖线丨后面的数据是下一周期的“质数”按上述方法算得的值，其排列顺序与该周期完全相同）

对于周期性排列的这些数据，无论从哪个数开始，累积相加，都不出现小于-1 的情况，且一周期内这些数据之和为 4.5。这就是说，如果大于 173 的质数，它们的间隔规律与我们上面讲的“质数”的间隔规律完全相同的话，那么，对大于 173 的任何一个质数q_i，都应有$q_i/4>i+3-1$，即$q_i/4>i+2$，而实际的质数排列要比我们上面讲的“质数”排列密度稀一些（或者说间隔大一些）。

因此对大于 173 的任一质数q_n，都有$\frac{q_n}{4}>n+2$

即，当$n\geqslant 40$

$$f_n^{/}>n+2 \qquad (4)$$

这个结论是由各段内的第一个偶数推出的，由于每段中$f_n^{/}$的值都随着偶数$2a$的增大而增大，故，对大于173^2+1的任何一个偶数，（4）式都成立[7].

需要注意的是，$f_n^{/}>n+2$是由公式（2）推出的结论，与公式（1）比较，对于大于173^2+1的任何一个偶数$2a$，都应有

$$f_n=a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1,2}{q_2})(1-\frac{1,2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{1,2}{q_n})$$

$$\geqslant a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{2}{q_2})(1-\frac{2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{2}{q_n})$$

$$=f_n^{/}>n+2$$

即，若$n\geqslant 40$，则$f_n>n+2$ （5）

3 近似公式的误差分析

对于大偶数 2a，它所能表示成的两 “奇质数”和的数目，称为偶数 2a的“真实值”，而由近似公式（1）算出的数值，叫做偶数 2a的理论值（或近似值）。一般来说，某一偶数的理论值与“真实值”是不相同的。（这里，“真实值”三字之所以加引号，是因为：（1）我们暂时把“1”看作了质数，而“1”并非质数；（2）我们这里所讲的“真实值”，不含前n-1 个已被划去的质数q_2、q_3、……q_n）。

例如，对于偶数 2a=200 来讲

理论值：

$$f_6=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\frac{11}{13}=6\frac{54}{91}$$

“真实值”：$F_6=7$ （200=1+199=19+181=37+163=43+157=61+139=73+127=97+103）因 3 和 7 已

被划去，故，"真实值"里不再含有"3+197"和"7+193"

某一偶数理论值与"真实值"的差，叫做该偶数的误差.上例中，偶数 200 的误差为：

$$\Delta_6 = f_6 - F_6 = 6\frac{54}{91} - 7 = -\frac{37}{91}$$

本小节，我们将以平面图形面积变化的方式来研究误差的变化。

对于大偶数 2a，我们先看一个质数的整数倍划去后的误差情况。

若$q_i|a$，自然数列中，当q_i的整数倍划去时，

理论值：$f_1 = a\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$

"真实值"：$F_1 = a-\frac{a}{q_i}$

误差：$\Delta_1 = f_1 - F_1 = 0$

我们可以借助图形的面积来形象地表示【如图1】，图中，长方形的面积代表大偶数 2a所能表示成的两自然数之和的数目——a，曲线左边的部分表示划去q_i的整数倍时，划去的数目，其数值为$\frac{a}{q_i}$，曲线右边的部分，显然是q_i的整数倍划去时，偶数 2a 所能表示成的两自然数之和的数目中，剩余的个数，其数值为$F_1=f_1=a-\frac{a}{q_i}$

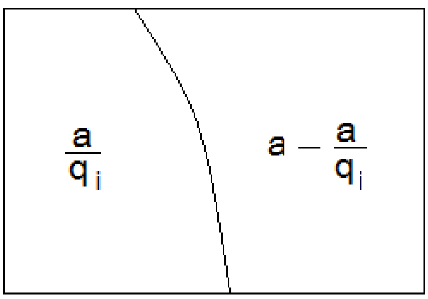

图1

若$q_i \nmid a$，且$q_i>2$，自然数列中，当q_i的整数倍划去时，

理论值：$f_1=a\left(1-\frac{2}{q_i}\right)$

"真实值"：$F_1=a-\left[\frac{2a}{q_i}\right]$

误差：$\Delta_1 = f_1 - F_1 = -\frac{2a}{q_i} + \left[\frac{2a}{q_i}\right] = -\frac{r_i}{q_i}$

注：$\left[\frac{2a}{q_i}\right]$表示$\frac{2a}{q_i}$的整数部分，$r_i$表示 $2a \div q_i$所得的余数。

我们仍可借助图形的面积来形象表示【如图 2】

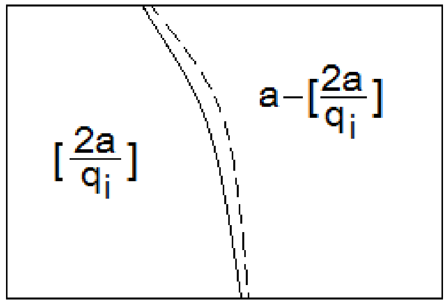

图 2

图 2 中，实曲线将矩形分成的两部分（数据已在图中标注）表示的意义与图 1 相同，虚线与矩形的边围成的部分（图中虚线的右方）表示由公式$f_1=a\left(1-\frac{2}{q_i}\right)$算出的理论值，实线与虚线之间的那一小部分，显然代表误差的绝对值：

$$|\Delta_1| = |f_1-F_1| = \left|-\frac{r_i}{q_i}\right| = \frac{r_i}{q_i} < 1$$

图中，虚线在实曲线的右侧，表示由公式$f_1=a\left(1-\frac{2}{q_i}\right)$算出的理论值小于"真实值" $a-\left[\frac{2a}{q_i}\right]$

再看两个质数的整数倍划去后的情况。对于大偶数 2a，设有两个质数q_i和q_k

3.1 若 $q_i>2$，$q_k>2$，且 $q_i|a$，$q_k|a$，当 q_i、q_k 的整数倍划去后，有：

$$f_2 = a\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\left(1-\frac{1}{q_k}\right)$$
$$= a-\frac{a}{q_i}-\frac{a}{q_k}+\frac{a}{q_iq_k}$$
$$= F_2$$
$$\Delta_2 = f_2 - F_2 = 0$$

例如，对于偶数 420，当 3 和 7 的整数倍划去时：

$$f_2 = 210\times(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 210\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7} = 120$$

$$F_2 = 210-\frac{210}{3}-\frac{210}{7}+\frac{210}{21} = 120$$

$$\Delta_2 = f_2-F_2 = 0$$

3.2 若 $q_i>2$，$q_k>2$，且 $q_i|a$，$q_k\nmid a$，当 q_i、q_k 的整数倍划去时

理论值：$f_2 = a(1-\frac{1}{q_i})(1-\frac{2}{q_k})$

$$= a-\frac{a}{q_i}-\frac{2a}{q_k}+\frac{2a}{q_iq_k}$$

"真实值"：$F_2 = a-\frac{a}{q_i}-[\frac{2a}{q_k}]+[\frac{2a}{q_iq_k}]$

误差：$\Delta_2 = f_2-F_2 = -\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{q_iq_k}$

[r_k和r分别是 $2a\div q_k$和 $2a\div(q_iq_k)$所得的余数]

例如，对于偶数 300，当 3 和 7 的整数倍划去时：

$$f_2 = 150\times(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{7}) = 71\frac{3}{7}$$

$$F_2 = 150-\frac{150}{3}-[\frac{300}{7}]+[\frac{300}{21}]$$

$$= 150-50-42+14=72$$

$$\Delta_2 = f_2-F_2 = -\frac{4}{7}$$

$= -\frac{6}{7}+\frac{6}{21}$ （$\frac{300}{7}$与$\frac{300}{21}$的余数都是 6）

3.3 若 $q_i>2$，$q_k>2$ 且 $q_i\nmid a$，$q_k\nmid a$ 当 q_i，q_k 的整数倍划去时

理论值：$f_2 = a(1-\frac{2}{q_i})(1-\frac{2}{q_k})$

$$= a-\frac{2a}{q_i}-\frac{2a}{q_k}+\frac{2a}{q_iq_k}+\frac{2a}{q_iq_k}$$

"真实值"：

$$F_2 = a-[\frac{2a}{q_i}]-[\frac{2a}{q_k}]+[\frac{2a}{q_iq_k}]+[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}]+1$$

（$1\leq m<q_i$）

误差：$\Delta_2 = f_2-F_2$

$$= -\frac{r_i}{q_i}-\frac{r_k}{q_k}+\frac{2r}{q_iq_k}\ \begin{matrix}+0\\-1\end{matrix}$$

说明：r_i，r_k和r分别为q_i，q_k，q_iq_k去除 2a所得的余数，最后一项 $\begin{matrix}+0\\-1\end{matrix}$，表示有时减 1，有时不减 1，减 1 还是不减 1，取决于$[\frac{2a}{q_iq_k}]-[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}]$的大小，若$[\frac{2a}{q_iq_k}]-[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}]=0$，最后一项取"-1"，若$[\frac{2a}{q_iq_k}]-[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}]=1$，最后一项取"+0"，即不减 1。

等式：

$$F_2= a-[\frac{2a}{q_i}]-[\frac{2a}{q_k}]+[\frac{2a}{q_iq_k}]+[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}]+1$$

各项的含义，我们以一个例子来说明：

以 2a=200，q_i=3，q_k=7 为例.3 和 7 的整数倍分别划去后：

$$f_2 = 100\times(1-\frac{2}{3})(1-\frac{2}{7})$$

$$= 100-\frac{200}{3}-\frac{200}{7}+\frac{200}{3\times7}+\frac{200}{3\times7}$$

$$F_2 = 100-[\frac{200}{3}]-[\frac{200}{7}]+[\frac{200}{3\times7}]+[\frac{200-2\times7}{3\times7}]+1$$

其中，100 表示偶数 200 所能表示成的两自然数之和的数目。

$[\frac{200}{3}]$表示 3 的倍数（含 1 倍，即质数 3 本身，下同）单独划去时，实际划去的数目。

$[\frac{200}{7}]$表示 7 的倍数单独划去时，实际划去的数目。

后三项表示 3 和 7 的倍数分别划去时，重复划去的数目.其中的$[\frac{200}{3\times7}]$表示的是这样一些两数和的数目：21+179，42+158，63+137，……，其中的一个加数是 3×7 的倍数，另一个加数既非 3 的倍数，也非 7 的倍数——这样的两数和的数目.$[\frac{200-2\times7}{3\times7}]+1$ 表示：14+186，35+165，56+144，……，一个加数是 3 的倍数，另一个加数是 7 的倍数——

这样的两数和的数目。

3.4 当 $q_i=2$ 时

3.4.1 若 2｜a，q_k｜a.2 和q_k的整数倍划去时

$$F_2=f_2=a(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{q_k})$$

$$\triangle_2=f_2-F_2=0$$

3.4.2 若 2｜a，$q_k\nmid a$.当 2 和q_k的整数倍划去时

$$f_2=a(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{q_k})=a-\frac{a}{2}-\frac{2a}{q_k}+\frac{2a}{2q_k}$$

$$F_2=a-\frac{a}{2}-[\frac{2a}{q_k}]+[\frac{2a}{2q_k}]$$

$$\triangle_2=f_2-F_2=-\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{2q_k}$$

例如，对于偶数 200，当 2 和 7 的倍数分别划去时

$$f_2=100\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{7})=35\frac{5}{7}$$

$$F_2=100-\frac{100}{2}-[\frac{200}{7}]+[\frac{200}{14}]$$

$$=100-50-28+14=36$$

$\triangle_2=f_2-F_2=-\frac{2}{7}$（$-\frac{2}{7}=-\frac{4}{7}+\frac{4}{14}$。7 和 14 去除 200，所得的余数均为 4）

3.4.3 若 $2\nmid a$，q_k｜a.当 2 和q_k的整数倍都划去时

$$f_2=a(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{q_k})=a-\frac{a}{2}-\frac{a}{q_k}+\frac{a}{2q_k}$$

$$F_2=a-\frac{a-1}{2}-\frac{a}{q_k}+[\frac{a}{2q_k}]$$

$$\triangle_2=f_2-F_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

例如，对于偶数 98，当 2 和 7 的整数倍划去时

$$f_2=49\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{7})=49\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=21$$

$$F_2=49-\frac{49-1}{2}-\frac{49}{7}+[\frac{49}{14}]=21$$

$\triangle_2=f_2-F_2=0$（即$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$）

3.4.4 若 $2\nmid a$，$q_k\nmid a$.当 2 和q_k的整数倍划去时

$$f_2=a(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{q_k})=a-\frac{a}{2}-\frac{2a}{q_k}+\frac{2a}{2q_k}$$

$$F_2=a-\frac{a-1}{2}-[\frac{2a}{q_k}]+[\frac{2a}{2q_k}]$$

$$\triangle_2=f_2-F_2=-\frac{1}{2}-\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{2q_k}$$

例如，对于偶数 202，当 2 和 7 的整数倍划去时

$$f_2=101\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{7})=\frac{505}{14}=36\frac{1}{14}$$

$$F_2=101-\frac{101-1}{2}-[\frac{202}{7}]+[\frac{202}{14}]=37$$

$\triangle_2=f_2-F_2=-\frac{13}{14}$（而$-\frac{1}{2}-\frac{6}{7}+\frac{6}{14}=-\frac{13}{14}$）

3.5 以上（1）——（4）所得误差综合如下：

3.5.1 $\triangle_2=0$

3.5.2 $\triangle_2=-\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{q_iq_k}$

3.5.3 $\triangle_2=-\frac{r_i}{q_i}-\frac{r_k}{q_k}+\frac{2r}{q_iq_k}{}^{+0}_{-1}$

3.5.4 $\triangle_2=0$

3.5.5 $\triangle_2=-\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{2q_k}$

3.5.6 $\triangle_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

3.5.7 $\triangle_2=-\frac{1}{2}-\frac{r_k}{q_k}+\frac{r}{2q_k}$

综合上面几种情况，我们可以得出下面的结论：对于大偶数 2a，当小于$\sqrt{2a}$的任意两个质数q_i，q_k的整数倍划去时，由理论公式$f_2=a(1-\frac{1,2}{q_i})(1-\frac{1,2}{q_k})$算出的值与真实值之间的误差，$\triangle_2$都可以表示成下面的形式：

$$\triangle_2=-h+b\ (0\leqslant h<3,\ 0\leqslant b<2) \quad (6)$$

上面几种情况，我们来研究其中的一种：对于大偶数 2a，当小于$\sqrt{2a}$的两个不能整除 2a的质数q_i，q_k的整数倍划去时：

$$f_2=a\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\left(1-\frac{2}{q_k}\right)$$

$$F_2=f_2-\triangle_2=a-\left[\frac{2a}{q_i}\right]-\left[\frac{2a}{q_k}\right]+\left[\frac{2a}{q_iq_k}\right]+\left[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}\right]+1$$

（1≤m＜q_i）

$$\triangle_2=-h+b\ (0\leq h<3,\ 0\leq b<2) \qquad (6)$$

我们也可借助图形的面积来形象地表示：

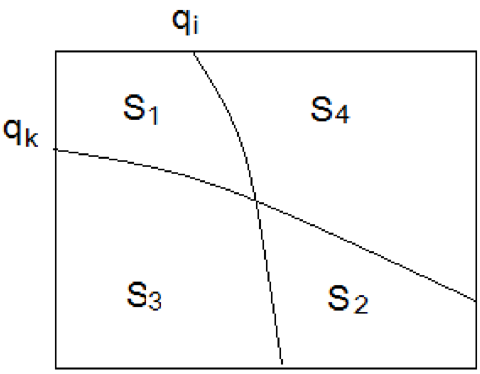

图3

图 3 中，偶数 2a所能表示成的两自然数之和的数目，我们用矩形的面积来表示，q_i线左边的部分（即S_1+S_3），表示q_i的整数倍单独划去时，大偶数 2a所能表示成的两自然数和的数目a中，实际划去的个数：

$$S_1+S_3=\left[\frac{2a}{q_i}\right]$$

q_k线下方的部分（图 3 中的S_3+S_2），表示q_k的整数倍单独划去时，大偶数 2a所能表示成的两自然数和的数目a中，实际划去的个数：

$$S_3+S_2=\left[\frac{2a}{q_k}\right]$$

图 3 中的S_3表示重复划去的数目：

$$S_3=\left[\frac{2a}{q_iq_k}\right]+\left[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}\right]+1\ (1\leq m<q_i)$$

图 3 中的S_4表示q_i，q_k的整数倍分别划去后，实际剩余的数目：

$$S_4=F_2=a-\left[\frac{2a}{q_i}\right]-\left[\frac{2a}{q_k}\right]+\left[\frac{2a}{q_iq_k}\right]+\left[\frac{2a-mq_k}{q_iq_k}\right]+1$$

（1≤m＜q_i）

我们能否在同一图形中，把它的理论值也表示出来呢？

在误差公式$\triangle_2=-h+b$中，我们可以这样来考虑：由于$f_2=F_2+\triangle_2$，也就是说，以F_2为基准，在其上再加上一个数$\triangle_2$时，便可得到f_2在$\triangle_2=-h+b$中，（1）如果不存在b，即b=0.（实际上是不可能的），那么，只要将基数F_2缩小h个单位，便可得到f_2（2）同样，如果h=0（也是不可能的），那么，只要在基数F_2的基础上，再增大b个单位，即可得到f_2，这两种情况若分别在图 3 中表示出来，我们便可得到下面的两个图形：

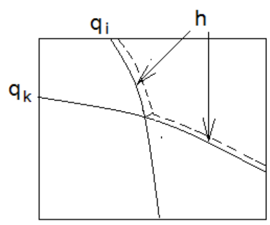

图4

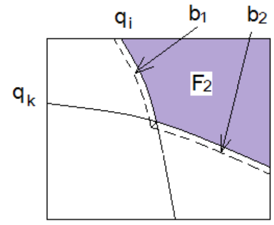

图5

以上两图中，q_i、q_k线与虚线围成的“狭长地带”的面积，分别为h和b，通过这两个量，我们可以将理论值f_2与“真实值”F_2以图形面积的形式联系起来，h和b应该在同一图形中，在图 4、图 5 这两个图中画出h和b，只是为了研究问题的方便.我们暂时撇开h的大小对图形各部分面积变化的影响，先研究b的大小对图形的影响。

在图 5 中，我们把由面积F_2向外扩展的“狭长地带”的面积b分成两部分：b_1和b_2，即：

$b=b_1+b_2$ 由于 $0\leq b<2$ 所以

$$0\leq b_1+b_2<2 \qquad (7)$$

结论：对于大偶数 2a，当小于$\sqrt{2a}$的任意两个不能整除 2a的质数q_i，q_k的所有整数倍划去之后，若不考虑h对误差的影响，则由近似公式$f=a\left(1-\frac{2}{q_i}\right)\left(1-\frac{2}{q_k}\right)$算出的数值与“真实值”之间的误差都小于 2.（$q_i$，$q_k$都能整除a或两数中有一个能整除a时，上述结论均成立，这一点，从上面的分析可以看得出来）。

再看三个质数的整数倍划去后的情形：

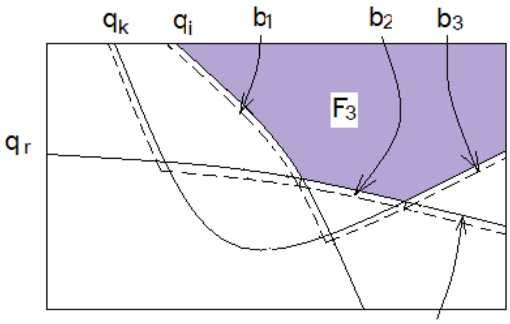

图6

设有三个小于$\sqrt{2a}$且不能整除 2a的质数q_i，q_k和q_r，当它们的整数倍分别划去后，若不考虑等式：△=-h+b中h对误差的影响，则“真实值”F_3 与理论值$f_3=a(1-\frac{2}{q_i})(1-\frac{2}{q_k})(1-\frac{2}{q_r})$之间的关系可以用图 6 来形象地表示。阴影部分表示“真实值”F_3，由上面的（7）式可知：

$$0\leqslant b_1+b_2+b_y<2$$

∴$0\leqslant b_1+b_2<2$（图中b_y是b中的一部分，故有$b_y\geqslant 0$）

同理 $0\leqslant b_2+b_3<2$，$0\leqslant b_3+b_1<2$

$$\because 0\leqslant b_1+b_2<2$$
$$0\leqslant b_2+b_3<2$$
$$0\leqslant b_3+b_1<2$$

∴$0\leqslant b_1+b_2+b_3<3$（8）（将上面三式相加得）

结论：对于大偶数 2a，小于$\sqrt{2a}$的任意三个不能整除 2a的质数q_i、q_k、q_r的整数倍分别划去后，若不考虑h对误差的影响，则由近似公式$f_3=a(1-\frac{2}{q_i})(1-\frac{2}{q_k})(1-\frac{2}{q_r})$算出的数值与“真实值”$F_3$之差大于等于 0 而小于 3，即 $0\leqslant f_3-F_3<3$（未考虑h的影响）

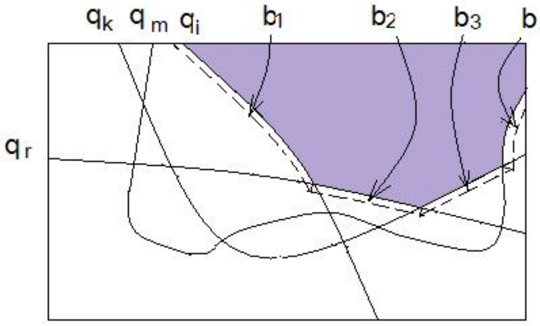

图 7

若q_i、q_k、q_r中有一个或几个能整除a，上述结论仍成立.

若有四个质数的整数倍被划去（如图 7）由 $0\leqslant f_3-F_3<3$ 得

$$\because 0\leqslant b_1+b_2+b_3<3$$
$$0\leqslant b_2+b_3+b_4<3$$
$$0\leqslant b_3+b_4+b_1<3$$
$$0\leqslant b_4+b_1+b_2<3$$

∴$0\leqslant b_1+b_2+b_3+b_4<4$（将上面四式相加得）

即 $0\leqslant f_4-F_4<4$（未考虑h的影响）

用数学归纳法可以证明，在不考虑h影响的情况下，小于$\sqrt{2a}$的n个质数（可以整除a，也可以不整除a）的整数倍全部划去时，有结论

$$0\leqslant f_n-F_n<n \quad （9）$$

（9）式是我们在不考虑h对误差影响的前提下推出的结论。

用同样的方法，我们可以证明：在不考虑b影响的情况下，小于$\sqrt{2a}$的n个质数（可以整除a，也可以不整除a）的整数倍全部划去时，有下面结论：

$$-\frac{3}{2}n<f_n-F_n\leqslant 0（未考虑b的影响） \quad （10）$$

将（9）式与（10）式综合考虑，显然可以得到下面的结论：对于大偶数 2a，若小于$\sqrt{2a}$的质数有n个：q_1，q_2，……，q_n.则当这n个质数的所有整数倍全部划去时，由理论公式 $f_n=a(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1,2}{q_2})(1-\frac{1,2}{q_3})\cdots\cdots(1-\frac{1,2}{q_n})$ 算出的值与“真实值”之间的差大于$-\frac{3}{2}n$而小于n，即：

$$-1.5n<f_n-F_n<n \quad （11）$$

4 结论

前面已经讲过，“真实值”三字之所以加引号，是因为：

4.1 我们把“1”看作了质数，而“1”并非质数，我们所讲的“真实值”里面，可能含有“$1+q_i$”。

4.2 我们这里所讲的“真实值”，不包括q_2、q_3……q_n这n-1 个奇质数，因为在划去这些质数的整数倍时，已连同这些质数本身一并划去了.若这n-1 个质数不被划去，那么实际的真实值（未加引号！）应不小于我们以上所讲的“真实值”。

补充说明：

实际值Fn需排除自然数 1 的影响，因 1 非素数。例如，对于偶数 8，1+7 不计入有效素数对。

现在，把我们开始当作质数的“1”划去，把q_2、q_3……q_n这n-1 个奇质数再从新补上来，则上面的公式（5）应改为：

$$f_n > n+1\ (n \geqslant 40)\quad(5)$$

$$\because f_n - F_n < n$$

$$\therefore F_n - f_n > -n$$

$$\text{又}\because f_n > n+1\ (n \geqslant 40)$$

$$\therefore F_n > 1$$

即，当偶数 $2a > 173^2+1$ 时，命题“1+1”正确. 而不大于 173^2+1 的偶数我们可以逐一验证.（经检验，当偶数 2a满足 $6 \leqslant 2a \leqslant 173^2+1$ 时，命题“1+1”全都正确）

所以，哥德巴赫猜想是正确的。

参考文献

[1] 梁钟浩,杨仕椿,廖群英.关于■的确界估计的进一步精确[J].大学数学,2025(1):16-22.

[2] 高改芸,刘志新.一类华林-哥德巴赫方程的小素数解问题[J].纯粹数学与应用数学,2024(3):450-464.

[3] 刘建亚,赵文嘉.群作用轨道上的素数与殆素数[J].中国科学:数学,2024(9):1297-1312.

[4] 孙智伟.一个新的关于素数的不等式[J].中国科学:数学,2024(9):1357-1364.

[5] 徐森.一个关于素变量的四元加性方程(英文)[J].数学进展,2023(5):857-866.

[6] 郭金海.1950—1970 年代中国数学家的哥德巴赫猜想研究[J].科学,2022(6):59-62+69.

[7] 朱立.关于两个素数和一个素数 k 次幂的丢番图不等式[J].数学年刊 A 辑(中文版),2019(4):365-376.

[8] 王元.哥德巴赫猜想研究[C].哈尔滨:黑龙江教育出版社,1987 年 11 月.78-83